La Cubologie (Tome I)

La connaissance est le patrimoine de l'humanité, donc chaque être humain peut l'utiliser librement mais il a aussi le devoir de le protéger, partager, améliorer.

Morphocode CODE

Copyright

Titre: La Cubologie (Tome I)

Auteur: Morphocode CODE

Site web: https://fan2cube.fr

Version: 18.3-26.11.13

© Mars-2018, Morphocode CODE

ISBN **:** 979-8-3976-3042-9

ALL RIGHTS RESERVED. This book is protected by international copyright laws. Any unauthorized use of this book to earn money is strictly prohibited, only use for personal purposes is permitted.

Préface

La Cubologie est l'étude mathématique des twists. Un twist est un puzzle en 3D à rotations ayant des autocollants qui le recouvrent, comme le Rubik's Cube, le Pocket, le Revenge, le Professor, le Skewb, le Square-1, le Pyraminx, etc ....

Ces puzzles ont des propriétés sans les mathématiques on ne peut pas les expliquer.

L'idée est associer à chaque twist τ un groupe nommé le groupe du twist et noté $G(\tau)$ ou simplement G.

La construction de G est assez long et compliqué mais cela permet de comprendre les propriétés du twist.

1 LE COMMENÇEMENT

Un twist est un puzzle en 3D à rotations ayant des autocollants , ou des étiquettes (des stickers) qui le recouvrent. Il est composé de pièces et a un mécanisme de rotations (le core) il peut avoir plusieurs types de pièces (sommets, arêtes, centres, ailles, etc ....) certaines pièces peuvent pivoter (avoir une orientation[1]) comme les arêtes du Rubik's Cube, les sommets du Skewb, etc ....

Ces puzzles ont des propriétés, mais sans les mathématiques on ne peut pas les expliquer.

Soit τ un puzzle en 3D à rotations ayant m autocollants X qui le recouvrent et $|X| = m$

Parmi les rotations existant du puzzle, on sélecte un nombre fini de rotations nommés rotations de base, ou rotation standard {A, B, C, D, .. } , les autres rotations seront les rotations non-standard, ou non-base.

À partir des rotations de base on construit l'ensemble M de formules du puzzle : M=l'ensemble engendré par des rotations de base.

---

[1] Une pièce possède k orientations si dans son emplacement elle a k façons de se loger.

M = <A, B, C, D, ... >

Un élément de M est donc une suite finie de rotations de base (et leur inverse A', B', C', D', ... bien sûr) avec ZZ', Z'Z interdit (où Z=rotation de base) , du genre :

$ABA'D^2C$;ok

$DAC'BA'C'^2$;ok

$BCDD'C^2A \Rightarrow$ interdit à cause DD'

....

On pose ZZ'=Z'Z=I où Z=une rotation de base

I se nomme "formule identité", "formule neutre" , ...

M muni la concaténation '.' forme un groupe (M, .) c'est le groupe des formules de τ.

1) $V,T \in M \Longrightarrow VT \in M$;loi interne

2) I=élément neutre

3) $V = AB^2CD'BC' \Longrightarrow V' = CB'DC'B'^2A'$, symétrique de V

4) (VT)S = V(TS) ; associatif

On écrit VT plutôt que V.T (on est paresseux!)

Les pièces de τ peuvent se déplacer et pivoter :

On pose :

$G^+ = (S_n \times \mathbb{Z}_k^n) \times (S_h \times \mathbb{Z}_t^h) \times (S_l \times \mathbb{Z}_s^l) \ldots$

La composante : $(S_n \times \mathbb{Z}_k^n)$:

S_n = permutation pièces de type 1

$\mathbb{Z}_k{}^n$ = vecteur orientation pièces de type 1

La composante : $\left(S_h \times \mathbb{Z}_t^h\right)$:

S_h = permutation pièces de type 2

$\mathbb{Z}_t{}^h$ = vecteur orientation pièces de type 2

etc ....

avec : nk + th + sl + ... = m

G^+ = l'ensemble des configurations de τ (permuter, pivoter sans contraints, ou τ sans core) .

On définit sur G^+ une loi de composition suivante:

Pour la composante $(S_n \times \mathbb{Z}_k{}^n)$:

(u,x) , $u \in S_n$, $x \in \mathbb{Z}_k{}^n$

$(u,x)\,(u',x') = (uu', x+u(x'))$

$uu' = u'ou$

où $u(x) = (x_{u(1)} , x_{u(2)} , , x_{u(3)} , ...)$; les composantes de x permutées par u .

Même chose pour les autres composantes
$(S_p \times \mathbb{Z}_h{}^p)$, $(S_q \times \mathbb{Z}_t{}^q)$, ...

$(G^+, .)$ forme un groupe , on dit que c'est le groupe des configurations de τ.

1.1 DEFINITION D'UN TWIST

¤ D'un côté , on a des formules, de l'autre côté on a des configurations (des autocollants) .

¤ Quand on applique une formule à une configuration on obtient une autre configuration, on passe d'une configuration à une autre par les formules, on dit que les formules agissent sur les configurations .

Définition : On dit que τ est un twist s'il existe une action '•' de M sur G^+ vérifiant :

$G^+ \times M \rightarrow G^+$

$(\mu, V) \rightarrow \mu \bullet V = \nu \in G^+$

A_1) $\forall \mu$; $\mu \bullet I = \mu$;élément neutre

A_2) $\forall \mu, V, T$; $(\mu \bullet V) \bullet T = \mu \bullet (VT)$;associatif

A_3) $e \bullet V = e \Rightarrow V = I$

Si quelqu'un fixe e c'est forcement I , I est la seule formule qui fixe tout le monde.

A_4) $\forall V, T$; $e \bullet (VT) = (e \bullet V)\ (e \bullet T)$;compatibilité des lois de M et G

1.2 DEFINITION LE GROUPE DU TWIST G

Puis on associe à chaque twist τ un groupe nommé le groupe du twist et noté $G(\tau)$ ou simplement G. Les éléments de G se nomment les états.

Par définition le groupe du twist G est :

$G \overset{def}{=} \{\mu \in G^+ \mid \mu = e \bullet V , V \in M\}$, e=état résolu

C'est l'ensemble des configurations provenant de M (à partir de e) .

→Le prototype d'un twist est le Pocket.



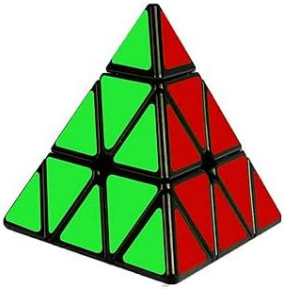
$|X| = m = 24$

rotations de base : {H, B, A, P, G, D}

M = <H, B, A, P, G, D>

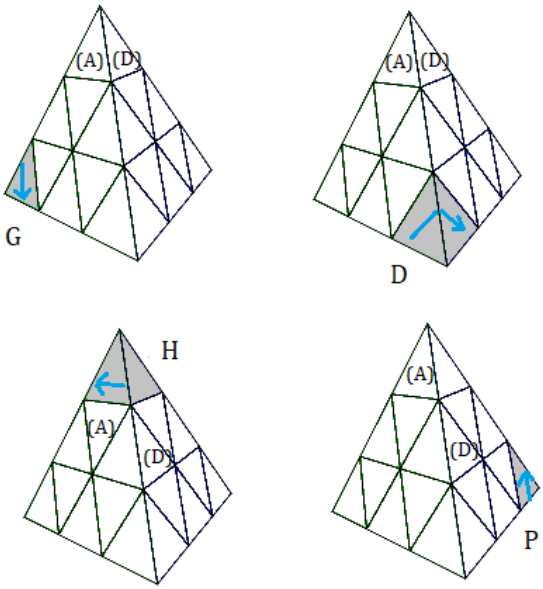
$G^+ = S_8 \times \mathbb{Z}_3^8$; (8x3 = 24 = m)

→Le Pyraminx.

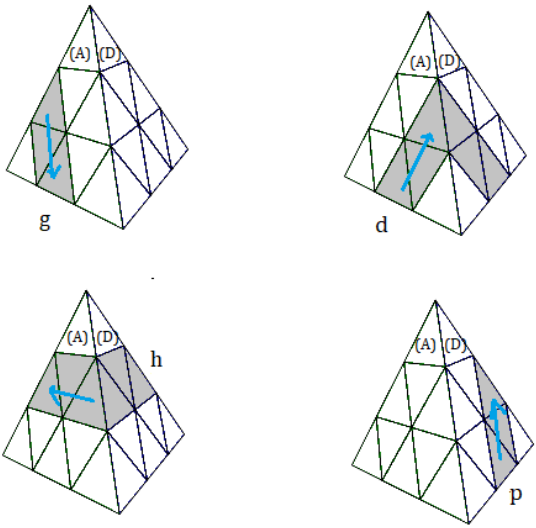


|X| = m = 36 ;

rotations sommets : H,P,G,D



rotation tranches : h,p,g,d



rotations de base : {H, P, G, D, h, p, g, d}

M = <H, P, G, D, h, p, g, d>

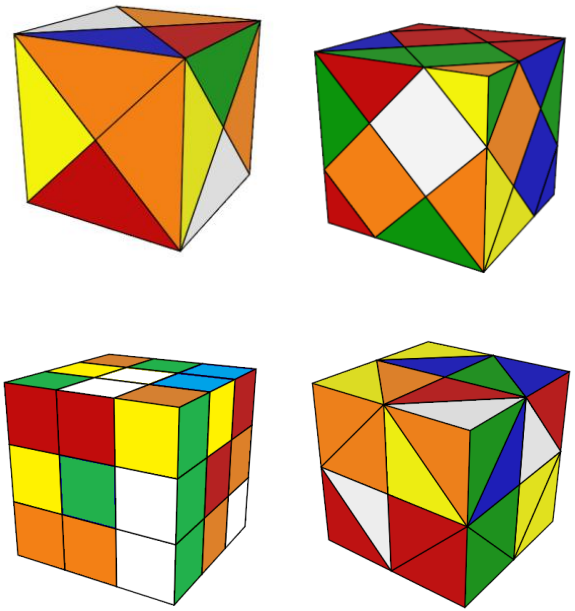
$G^+ = S_6 \times \mathbb{Z}_2^6 \times \mathbb{Z}_3^4 \times \mathbb{Z}_3^4$;(2x6+3x4+3x4=36=m)

1.3 EXEMPLES DE TWISTS

Prenons quelques twists

On commence par fixer le twist, càd orienter le twist.

Puis on mélange le twist avec les rotations de base (en respectant l'orientation du twist, càd sans bouger, ni tourner le twist, c'est comme s' il y a un mécanisme qui fixe le twist et on peut seulement tourner les rotations), on obtient alors un joli motif, une configurations des autocollants comme indiquent ces figures ci-dessous



les configurations du twist

On appelle ces motifs : les configurations .

Un état est une configuration provenant des rotations de base (à partir de l'état résolu) . C'est l'ensemble de ces

états G munie d'une loi de composition '.' ce qu'on appelle le groupe (G, .) du twist.

2 LE SKEWB

2.1 L'INTRODUCTION



Le Skewb

Peu après la découverte du Rubik's Cube j'ai fait le rencontre du Skewb (Inventeur: Tony Durham en 1982), à cette époque c'est Meffert qui produit ce twist à grande échelle avec les couleurs un peu fluorescentes qui rendent le cube vraiment joli une fois mélangé.

Le Skewb est un twist un peu "exotique", il fait partie d'une famille assez noble de l'univers des twists. Il est formé de 8 sommets et 6 centres.

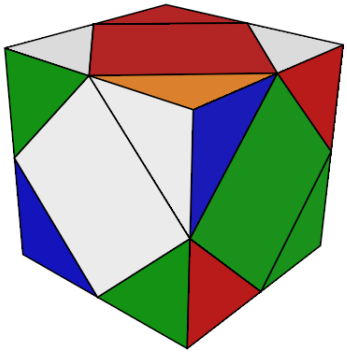
Observation

Le Skewb est formé par des tétraèdres (sommets) et des carrées (centres) :

1. Les centres (6) : 1 couleur, ils bougent comme dans le Revenge.

2. Les sommets (8): portant 3 couleurs, ils se déplacent et pivotent.

Les rotations se font par rapport aux sommets. Une rotation déplace 3 centres et 3 sommets.



Skewb mélangé

Durant la résolution de ce twist, j'ai remarqué que le Skewb possède deux propriétés étranges :

P1: Quand les sommets Haut sont bien placés, alors les sommets Bas sont automatiquement bien placés !

P2: Quand les sommets sont isolés (les sommets Haut sont en Haut, les sommets Bas sont en bas) alors la loi des twists s'applique.

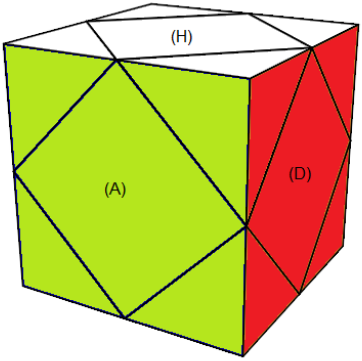
Pour expliquer ces propriétés j'ai donc décidé d'étudier ce twist mathématiquement.

Il faut donc cherche son groupe et regarder les propriétés de ce groupe.

2.2 FIXER LE CUBE

On prend un Skewb standard et commençons par fixer le Cube, c'est-à-dire on oriente le twist autrement dit on désigne qui est la face Haut, la face Bas et les couleurs associées, ... pour nous ça sera :

H(aut) = b(lanc), B(as) = j(aune), A(vant) = v(ert), P(ostérieur) = k(lein), G(auche) = o(range), D(roite) = r(ouge) .



Le fait de fixer le Cube nous permet d'avoir les symboles A,G,D,P, etc ....

2.3 L'EMPLACEMENT

L'emplacement est une position fixe, comme une maison, un restaurant, ... Le Skewb a deux sortes d'emplacements : l'emplacements des sommets, et l'emplacement des centres. Un emplacement est un objet à facettes et porte un nom, l'initiale des faces qui le compose, suivante la règle:

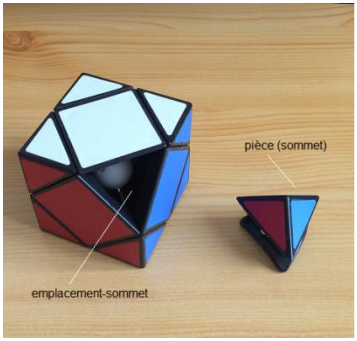
Face dominante+sens horaire

avec face dominante: H>B

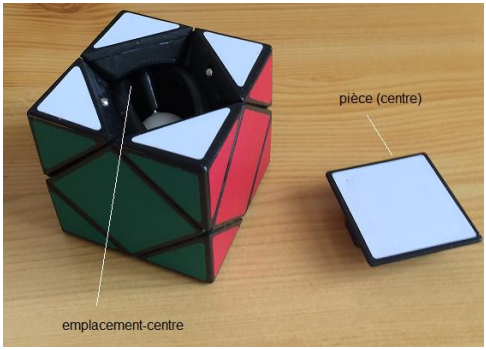
ce qui donne:

-l'emplacement des sommets: (HDA)=Haut-Droite-Avant, (BAD)=Bas-Avant-Droite, ...

-l'emplacement des centres: (H)=centre Haut, (A)=centre Avant, ...



emplacement et pièce



emplacement et pièce

L'emplacement est un objet à facettes.

2.4 LES PIECES

Les pièces sont des objets à couleurs, le Skewb a deux sortes de pièces: Les sommets à 3 couleurs, les centres à une couleur. Les pièces ont un nom, l'initiale des couleurs qui la composent, suivante la règle:

Couleur dominante+sens horaire

avec couleur dominante: b>j

ce qui donne:

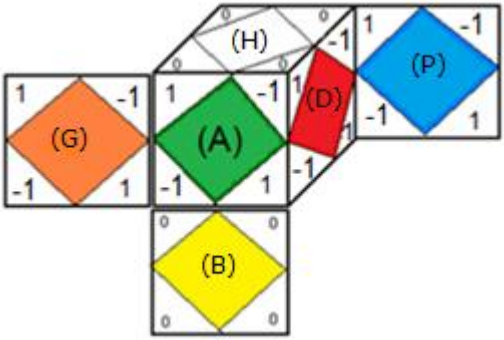
-Les sommets: (brv)=blanc-rouge-vert, (jov)=jaune-orange-vert , ...

-Les centres: (b)=blanc, (r)=(rouge), ...

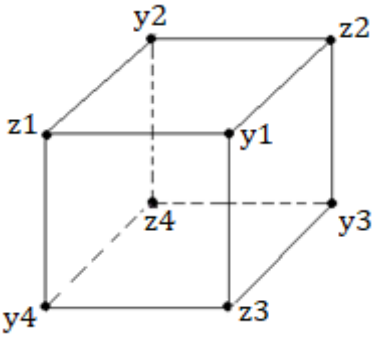
Par abuse de langage on dit le sommet (HDA), le centre (A) au lieu de "le sommet contenu dans (HDA)", "le centre contenu dans (A), etc.....

2.5 ORIENTATION DES SOMMETS

Les sommets ont 3 couleurs dont l'une est dominante.



Marquage



numérotés les sommets

Rappel: Les couleurs dominantes pour les sommets

blanc > jaune et on tourne dans le sens horaire .

y_1=(brv), y_2=(bok), y_3=(jrk), y_4=(jov) ; sommets impairs (liés)

z_1=(bvo), z_2=(bkr), z_3=(jvr), z_4=(jko) ;sommets pairs (libres)

Les sommets impairs y_i se baladent et se placent dans leur emplacements , à chaque fois que la couleur dominante se trouve sur une facette marquée 1 son orientation vaut 1 (1 twist) ,

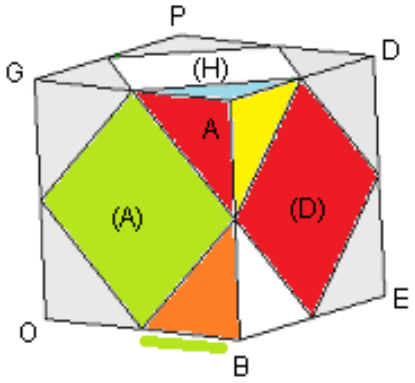
sur -1 son orientation vaut -1 (-1 twist) ,

sur 0 son orientation vaut zéro (0 twist, bien orienté).

De même pour les sommets pairs z_i

par exemple le sommet y_3=(jrk) se place en (HDA) avec jaune=D, alors y_3 vaut 1 (1 twist) car la couleur dominante jaune est sur la facette 1,

de même pour le sommet z_1=(bvo) dans (BAD) avec blanc=D, alors z_1=-1 (-1 twist) car la couleur dominante blanc se trouve sur -1.



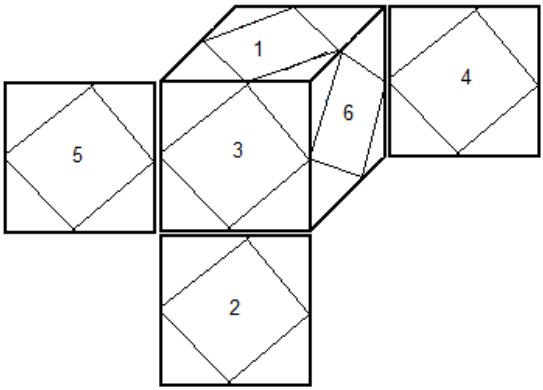
(2.5.1) Table d'orientation des sommets

rotation	v	y	w	z	δ
A	id	(1,0,0,0,)	(1,2,3)	(-1,-1,-1,0)	(1,6,3)
P	id	(0,1,0,0)	(1,4,2)	(-1,-1,0,-1)	(1,5,4)
E	id	(0,0,1,0)	(3,2,4)	(0,-1,-1,-1)	(6,4,2)
O	id	(0,0,0,1)	(1,3,4)	(-1,0,-1,-1)	(3,2,5)
G	(1,4,2)	(-1,-1,0,-1)	id	(1,0,0,0)	(1,3,5)
D	(1,2,3)	(-1,-1,-1,0)	id	(0,1,0,0)	(1,4,6)
B	(1,3,4)	(-1,0,-1,-1)	id	(0,0,1,0)	(3,6,2)
H	(2,4,3)	(0,-1,-1,-1)	id	(0,0,0,1)	(5,2,4)

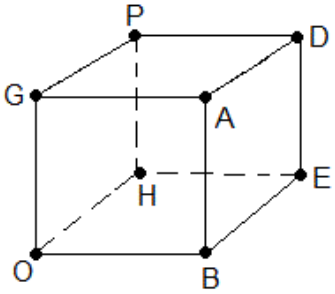
2.6 LES CENTRES

Pour les centres c'est plus simple, il n'y a que des permutations, pour un Skewb standard il n'y a pas d'orientation pour les centres. On peut numéroter les centres ainsi :

(H)=1, (B)=2, (A)=3, (P)=4, (G)=5, (D)=6



2.7 LES ROTATIONS



Voici les rotations (par rapport aux sommets):

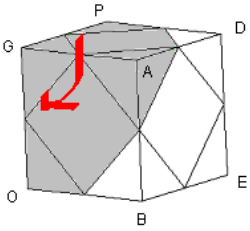
(HDA) = A, (HPD) = D, (HGP) = P, (HAG) = G

(BAD) = B, (BDP) = E, (BPG) = H, (BGA) = O

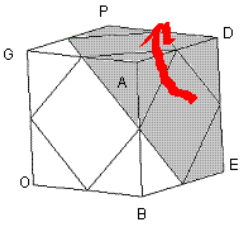
G = tourner 120° le sommet Gauche dans le sens horaire.

G' = tourner -120° le sommet Gauche

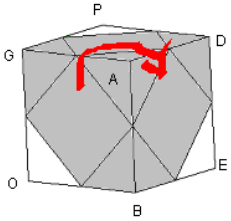
^{t}H = tourner le cube-entier 90° suivant H (face H, centre H,...)



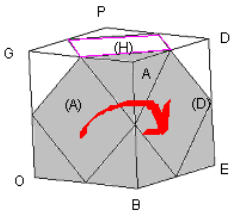
rotation G



rotation D



rotation A



rotation B

Les rotations de base: {A, P, O, E, G, D, B, H}

<u>Rotations étendues</u>

À part ces rotations de base, on a 5 autres rotations nommées "rotation étendue" : On imagine que toutes les pièces du Cube sont détachées du core ! on peut alors les déplacer (en respectant le camp de chacune, sommets entre sommets, centres entre centres) et les pivoter librement.

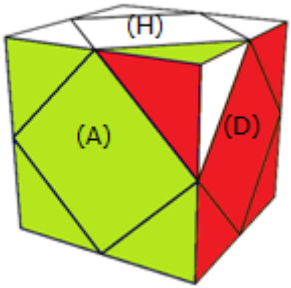
Ce sont des rotations qui violent les lois.

¤ Rotation étendue $\psi_1 = (HDA)^+$

1) On enlève le sommet (HDA)

2) On le pivote à 120°

3) On le remet dans son emplacement.



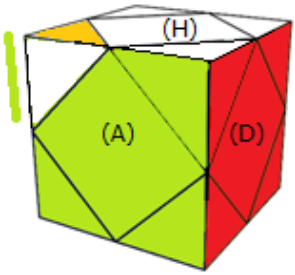
Rotation étendue $\psi_1 = (HDA)^+$

¤ Rotation étendue $\psi_2 = (HAG)^+$

1) On enlève le sommet (HAG)

2) On le pivote à 120°

3) On le remet dans son emplacement.



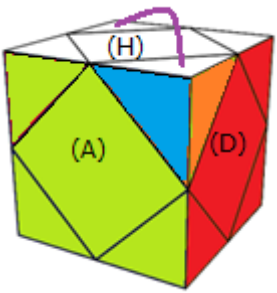
Rotation étendue $\psi_2 = (HAG)^+$

¤ Rotation étendue $\Omega_1 = (HDA) \leftrightarrow (HGP)$

1) On enlève les sommets (HDA), (HGP)

2) On permute

3) On les remet dans leur emplacement.



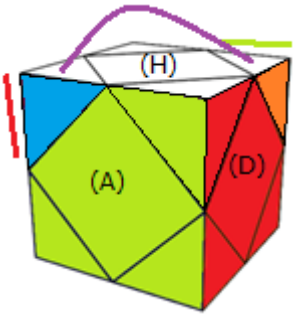
Rotation étendue $\Omega_1 = (HDA) \leftrightarrow (HGP)$

¤ Rotation étendue Ω_2 = (HAG)↔(HPD)

1) On enlève les sommets (HAG), (HPD)

2) On permute

3) On les remet dans leur emplacement.



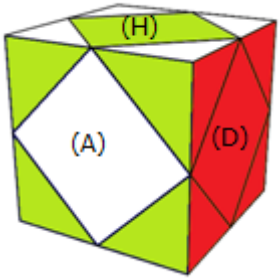
Rotation étendue Ω_2 = (HAG) ↔(HPD)

¤ Rotation étendue Ω_3 = (H)↔(A)

1) On enlève les centres (H), (A)

2) On permute

3) On les remet dans leur emplacement.



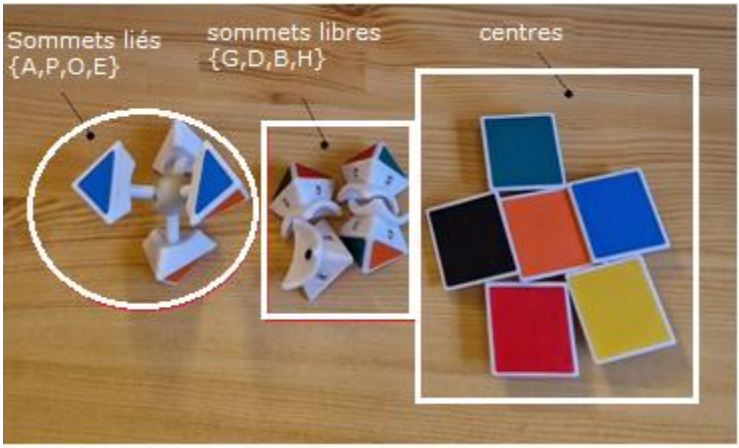
Rotation étendue Ω_3 = (H,A)

Rappel : Pour réaliser tous ces manœuvres on imagine que les pièces sont détachées du core (on supprime le core) donc elles bougent et tournent librement, il n'y a pas de contraints.

2.8 L'ENSEMBLE DES CONFIGURATIONS G^+

Quand on fait une rotation on voit que les pièces bougent. Imaginons que toutes les pièces du Cube soient détachées ! comme si il n'y a pas de core , alors on peut les déplacer, pivoter librement en restant dans le camp de chacune.

Si on démonte le Skewb, on voit que les sommets sont divisés en 2 groupes, les sommets attachés au core, et les sommets libres. Le sommets se déplacent librement mais restant sur leur camp.



- On a 4 sommets-liés qui baladent par tout dans leur camp, on a donc affaire à S_4.

-Ces sommets ont 3 orientations, on a affaire à $\mathbb{Z}_3^4$

- On a 4 sommets-libres qui baladent par tout dans leur camp, on a donc affaire à S_4.

-Ces sommets ont 3 orientations, on a affaire à $\mathbb{Z}_3^4$

-On a 6 centres qui baladent dans leur camp aussi, on a affaire à S_6

On pose :

$G^+ = (S_4 \times \mathbb{Z}_3^4) \times (S_4 \times \mathbb{Z}_3^4) \times S_6$

G^+ = C'est l'ensemble des configurations (des autocollants sans contraints, sans core)

2.9 LOI '.' SUR G^+

On va définir une loi de composition '.' dans G^+ afin que $(G^+,.)$ soit un groupe.

$(v,y,w,z,\delta), (v',y',w',z',\delta') \in \left(S_4 \times \mathbb{Z}_3^4\right) \times \left(S_4 \times \mathbb{Z}_3^4\right) \times S_6$

$(v,y,w,z,\delta)(v',y',w',z',\delta') = (vv', y+v(y'), ww', z+w(z'),\delta\delta')$

$vv' = v' \circ v$

$v(y) = (y_{v(1)}, y_{v(2)}, y_{v(3)}, y_{v(4)})$

2.10 LES FORMULES (M,.)

On pose : $ZZ' = Z'Z = I$, Z=rotation de base

Une formule est une suite finie de rotations de base avec la règle ZZ', Z'Z interdit (Z=rotation de base)

Exemples de formules pour le Skewb:

$GDG'D'$, A^2BHED, ...

$G' = G^2$

$D^3 = I$

DHGG'A ⇒ interdit à cause GG'

On note M l'ensemble des formules

M = < A,P,O,E,G,D,B,H >

On dit que M est engendré par {A,P,O,E,G,D,B,H }

Remarque : Ici M est infini

Les formules étendues

Une formule étendue est une suite finie de rotations comporte au moins une rotation étendue. Exemple

$HGD\psi_1^2$ H'A

On note M^+ l'ensemble des formules étendues

M^+ = < H, B, A, P, G, D, O, E, ψ_1, ψ_2, Ω_1, Ω_2, Ω_3 >

M (resp. M^+) muni la concaténation '.' forme un groupe, le groupe des formules (M,.) (resp. (M^+,.) le groupe des formules étendues)

2.11 LES ETATS DE BASE

à chaque rotation de base Z on associé une configuration μ_Z nommé état base

$Z \rightarrow \mu_Z$: $A \rightarrow \mu_A$, $D \rightarrow \mu_D$, $G \rightarrow \mu_G$, ...

Puis on définit la fonction $\mathcal{X}$ de M sur G^+ ainsi

$\mathcal{X} : M \rightarrow G^+$

$\mathcal{X}(A) = \mu_A$, $\mathcal{X}(D) = \mu_{BD}$, $\mathcal{X}(G) = \mu_G$, ...

Ensuite on proplonge en formule :

V = AHDG

$\mathcal{X}(V) = \mu_A\mu_H\mu_D\mu_G$

et $\mathcal{X}$ vérifie ;

1) $\mathcal{X}(I) = e$

2) $\mathcal{X}(VT) = \mathcal{X}(V)\,\mathcal{X}(T)$

3) $\mathcal{X}(V) = \mathcal{X}(T) \Rightarrow V = T$;($\mathcal{X}$ est)

Note : (3) signifie que, par définition, deux foumules qui donnent la même configuration sont considérées comme identiques,

$\mathcal{X}$ est bijective donc M est fini car G^+ est fini

2.12 L'ACTION DE M SUR G^+

On va maintenant définir une action libre et compatible '•' de M sur G^+ .

$G^+ \times M \rightarrow G^+$

$(\mu, V) \rightarrow \mu \bullet V = \mu \mathcal{X}(V)$

A_1) $\forall \mu$; $\mu \bullet I = \mu$;élément neutre

A_2) $\forall \mu, V, T$; $(\mu \bullet V) \bullet T = \mu \bullet (VT)$;associatif

A_3) $e \bullet V = e \Rightarrow V = I$

Si quelqu'un fixe e c'est forcement I , I est la seule formule qui fixe tout le monde.

(2.12.1) A_4) $\forall V, T$; $e \bullet (VT) = (e \bullet V)\ (e \bullet T)$;compatibilité des lois de M et G

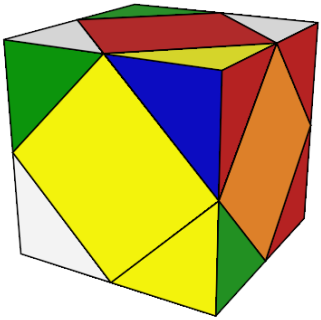
2.13 L'ENSEMBLE DES ETATS G

Par définition le groupe de Skewb G est :

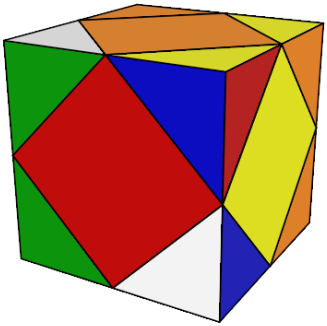
$G = \{\mu \in G^+ \mid \mu = e \bullet V , V \in M\}$; e=état résolu

Les éléments de G se nomme les états, ce sont des configurations provenant de M (à partir de e).

Voici 2 états



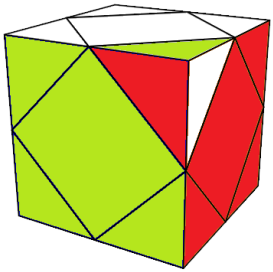
un état



un autre état

Un état est une sort de motif des autocollants.

Un état étendu ou une configuration, ce sont des états obtenus par des rotations ayant au moins une rotation étendue (là aussi on respecte l'orientation du Cube) , par exemple.



un état étendu, une configuration

Remarque : l'axiome (A_3) montre que deux formules donnant le même état seront considérées comme identiques .

En effet

$e \bullet V = e \bullet T$ il faut montrer V = T, allons-y

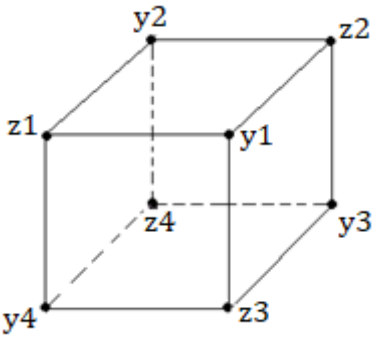
$(e \bullet V) \bullet T' = (e \bullet T) \bullet T'$

$e \bullet (VT') = e \bullet (TT')$

$e \bullet (VT') = e \bullet I = e$

d'après (A_3) $VT' = I \Longrightarrow V = T$

2.14 ANALISE LES SOMMETS



On nomme Q={A,P,E,O} = {y_1,y_2,y_3,y_4} les sommets impairs (sommets liés) . et S={G,D,B,H} = {z_1,z_2,z_3,z_4 } les sommets pairs (les sommets libres) et les sommets restent dans leur camp. Les pairs déplacent les impairs et inversement. Ce qui montre que

$$G \subset \left(S_4 \times \mathbb{Z}_3^4\right) \times \left(S_4 \times \mathbb{Z}_3^4\right) \times S_6$$

Les mouvements des sommets se font de deux façons:

par exemple

* les pairs déplacent les impairs:

-par permutations de type (a,b,c) provenant des rotations de base.

-par permutations du type (a,b)(c,d) provenant des commutateurs.

* Quand le déplacement est réalisé par (a,b,c), d'après le tableau d'orientation des sommets, le camp déplaçant gagne ±1 twists et camp déplacé gagne ±3

en effet

pour fixer des idées on prend par ex la rotation G, qui déplace P→A→O et le camp S gagne 1 et Q gagne -3.

* Quand le déplacement est réalisé par (a,b)(c,d), le camp déplaçant gagne 0 twists et le camp déplacé gagne 3k

en effet

Q = {A,P,E,O}

$[GD]=GDG'D' =(A,P,O)(A,P,E)(A,P,O)^{-1}(A,P,E)^{-1}$

[GD]=(A,P,O)(A,P,E)(O,P,A)(E,P,A)

[GD]=(A,P)(E,O)

(a,b)(c,d)=[XY]=XYX'Y' ceci apporte 0 au camp déplaçant et 3k au camp déplacé.

Les pièces déplacées apportent à leur camp un nombre 3k d'orientations (un multiple de 3)

En résumé:

⟶Si les sommets-pairs S déplacent les sommets-impairs Q, alors Q gagne 3k twists, et le nombre de twists de S est modifié.

⟶Mais si S déplace les impairs Q uniquement par des commutateurs alors Q gagne 3k et S non modifié.

De même pour les impairs Q.

Loi des twists : Quand les sommets sont isolés càd les sommets blancs sont en Haut, les sommets jaunes sont en Bas, on a :

-La somme des orientations des sommets-Impair est un multiple de 3

$$\sum y_i = 0 \pmod 3$$

-La somme des orientations des sommets-Pair est un multiple de 3

$$\sum z_i = 0 \pmod 3$$

2.15 THEOREME FONDAMENTAL

On sait que

$G \subset \left(S_4 x\, \mathbb{Z}_3^4\right) x \left(S_4 x\, \mathbb{Z}_3^4\right) x\, S_6$

I. Analyse

Une rotation de base, déplace 3 sommets (resp. 3 centres) en un 3-cycle, donc les permutations des sommets (resp. des centres) sont des permutations paires, on a donc

A_4 à la place de S_4 (resp. A_6 à la place de S_6) donc

$G \subset \left(A_4 \text{ x } \mathbb{Z}_3^4\right) x \left(A_4 \text{ x } \mathbb{Z}_3^4\right) x\, A_6$

Rappel :

A_4 = {(1,2,3),(1,2,4),(1,3,2),(1,3,4),(1,4,2),(1,4,3),

(2,3,4),(2,4,3),(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3), id}

K={id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)} groupe de Klein

II. Analyse (plus délicate)

C'est le passage de $\mathbb{Z}_3^4$ à $\mathbb{Z}_3^3$ qui est plus délicate.

Quand les sommets sont isolés , les ensembles Q et S ne contiennent que des permutations du types (a,b)(c,d) .

Donc si on veut placer les sommets impairs Q par ex, on est obligé d'utiliser les commutateurs donc on apporte à Q un nombre 3k twist et 0 twist à S. C'est-à-dire

$$\sum_i y_i = 0 \pmod 3$$

Le même raisonnement s'applique sur les sommets pairs S, autrement dit on a aussi : Quand les sommets sont isolés :

$$\sum_i z_i = 0 \pmod 3$$

Comme au départ , les sommets sont isolés et les orientations vaut 0 donc dès que les sommets sont isolé on a :

$$\sum_i y_i = 0 \pmod 3$$

$$\sum_i z_i = 0 \pmod 3$$

Finalement pour l'orientation, on a seulement besoin $\mathbb{Z}_3^3$ au lieu de $\mathbb{Z}_3^4$

On démontre qu'on a exactement:

<u>Théorème fondamental</u>

Un élément de G^+ est un élément de G ssi il vérifie les lois :

μ vérifie (T_1), (T_2), $(P) \Leftrightarrow \mu \in G$

$(v,y,w,z,\delta) \in (S_4 \text{ x } \mathbb{Z}_3^4) \text{ x } (S_4 \text{ x } \mathbb{Z}_3^4) \text{ x } S_6$

(T_1) $y = 0 \pmod 3$

(T_2) $z = 0 \pmod 3$

(P) $sig(v) = sig(w) = sig(\delta) = 1$

ce qui donne

$G = (A_4 \text{ x } \mathbb{Z}_3^3) \text{ x } (A_4 \text{ x } \mathbb{Z}_3^3) \text{ x } A_6$; les éléments de G^+ qui vérifient les lois.

$|G| = 37791360$

La formule de Burnside donne

$$\mathcal{N} = \frac{1}{|M|} \sum_{V \in M} |F_v|$$

$F_v = \{\mu \in G^+ \mid \mu \bullet V = \mu \text{ , } V \in M\}$

$\mathcal{N}$ = le nombre d'orbites = le nombres de choix = le nombre de contraints.

Pour trouver $\mathcal{N}$ il suffit de regarder les lois.

$(T_1) \Rightarrow$ 3 choix

$(T_2) \Rightarrow$ 3 choix

$(P) \Rightarrow$ 2 .2 .2 choix

$\mathcal{N} = 3^2 \cdot 2^3 = 72$

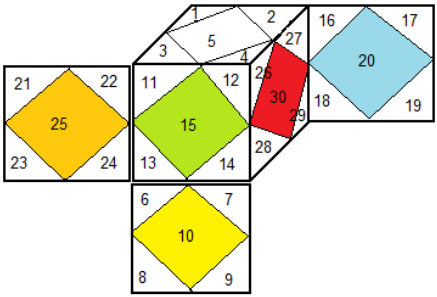
$$|G| = \frac{|G^+|}{\mathcal{N}} = \frac{(4!\ \text{x}\ 3^4)\ \text{x}\ (4!\ \text{x}\ 3^4)\ \text{x}\ 6!}{3^2 2^3} = 37791360$$

On trouve le même résultat.

2.16 L' ENSEMBLE DES PERMUTATIONS Λ

Permutations des autocollants

Soit donc X = {1,2,3,...,30} l'ensemble des autocollants ainsi numérotés,



Les autocollants numérotés

à chaque rotation de base {A,P,O,E,G,D,B,H} on associe une permutation de S_x

$A \rightarrow p_A$, $P \rightarrow p_P$, $O \rightarrow p_O$, ...

$\Lambda = < p_A, p_P, p_O, p_E, p_G, p_D, p_B, p_H >$

De plus on associe aussi les 5 rotations étendues ψ_1, ψ_2, Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 (ce sont des rotations qui violent les lois)

$\psi_1 \rightarrow p_{\psi 1}$, $\Omega_1 \rightarrow p_{\Omega 1}$, ...

$\Lambda^+ = < p_A, p_P, p_O, p_E, p_G, p_D, p_B, p_H, p_{\psi 1}, p_{\psi 2}, p_{\Omega 1}, p_{\Omega 2}, p_{\Omega 3} >$

Rotations standards :

p_H = (1,13,29)(21,6,18)(17,24,9)(8,19,23)(20,25,10);

p_B = (13,26,9)(6,12,29)(24,4,18)(14,28,7)(15,30,10);

p_A = (3,27,14)(11,2,28)(22,16,7)(4,26,12)(5,30,15);

p_P = (2,22,19)(16,3,23)(27,11,8)(1,21,17)(5,25,20);

p_G = (1,12,24)(21,4,13)(17,26,6)(3,11,22)(5,15,25);

p_D = (4,17,29)(26,1,18)(12,21,9)(2,16,27)(5,20,30);

p_O = (3,28,19)(11,7,23)(22,14,8)(13,6,24)(15,10,25);

p_E = (14,2,23)(28,16,8)(7,27,19)(29,18,9)(30,20,10);

Rotations étendues :

$p\psi_1$ = (4,26,12) ;

$p\psi_2$ = (3,11,22) ;

$p\Omega_1$ = (3,2)(16,11)(27,22) ;

$p\Omega_2$ = (1,4)(21,26)(17,12) ;

$p\Omega_3$ = (5,15) ;

Le GAP

Télécharger le GAP ici :

https://www.gap-system.org/Releases/index.html

le fichier gap_skewb.txt ici :

https://fan2cube.fr/gap_skewb.txt

Dans la fenêtre de cmd on se place dans le dossier de GAP

C:\Users\nom> cd\gap4r4\bin

C:\gap4r4\bin>gap < gap_skewb.txt

le fichier gap_skewb.txt :

#gap_skewb.txt

pH := (1,13,29)(21,6,18)(17,24,9)(8,19,23)(20,25,10);

pB := (13,26,9)(6,12,29)(24,4,18)(14,28,7)(15,30,10);

pA := (3,27,14)(11,2,28)(22,16,7)(4,26,12)(5,30,15);

pP := (2,22,19)(16,3,23)(27,11,8)(1,21,17)(5,25,20);

pG := (1,12,24)(21,4,13)(17,26,6)(3,11,22)(5,15,25);

```
pD := (4,17,29)(26,1,18)(12,21,9)(2,16,27)(5,20,30);

pO := (3,28,19)(11,7,23)(22,14,8)(13,6,24)(15,10,25);

pE := (14,2,23)(28,16,8)(7,27,19)(29,18,9)(30,20,10);

pPsi1 := (4,26,12) ;

pPsi2 := (3,11,22) ;

pOmega1 := (3,2)(16,11)(27,22) ;

pOmega2 := (1,4)(21,26)(17,12) ;

pOmega3 := (5,15) ;

LAMBDAPLUS := Group( pH, pB, pA, pP, pG, pD, pO, pE,
pPsi1, pPsi2, pOmega1, pOmega2, pOmega3 );

LAMBDA := Group( pH, pB, pA, pP, pG, pD, pO, pE );

N := 3*3*2*2*2 ;;


Print( "\n" );

Print( "|LAMBDA+| = ",Size( LAMBDAPLUS ) , "\n" );

Print( "|LAMBDA| = ", Size( LAMBDA ) , "\n" );

Print( "N = ",N , "\n" );

Print( "|G+| = ", Factorial(4) * (3^4) * Factorial(4) * (3^4)
* Factorial(6)  , "\n" );
```

Print("|G| = |G+|/N = ", (Factorial(4) * (3^4) * Factorial(4) * (3^4) * Factorial(6))/ N , "\n");

Le GAP nous donne bien le |G| = 37791360 et

$G^{+} = (S_4 \text{ x } \mathbb{Z}_3^4) \text{ x } (S_4 \text{ x } \mathbb{Z}_3^4) \text{ x } S_6$

$G = (A_4 \text{x } \mathbb{Z}_3^3) \text{ x } (A_4 \text{x } \mathbb{Z}_3^3) \text{ x } A_6$

$G \subset G^{+}$

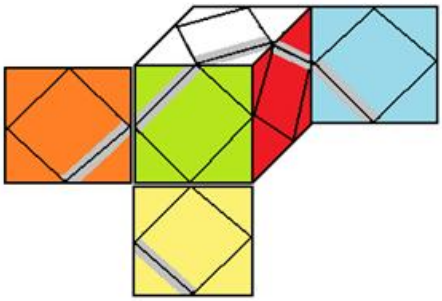
$|\Lambda| = [G|$

$|\Lambda^{+}| = [G^{+}|$

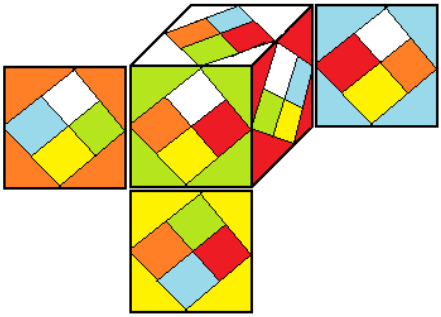
```
gap> gap> (1,13,29)(6,18,21)(8,19,23)(9,17,24)(10,20,25)
gap> (4,18,24)(6,12,29)(7,14,28)(9,13,26)(10,15,30)
gap> (2,28,11)(3,27,14)(4,26,12)(5,30,15)(7,22,16)
gap> (1,21,17)(2,22,19)(3,23,16)(5,25,20)(8,27,11)
gap> (1,12,24)(3,11,22)(4,13,21)(5,15,25)(6,17,26)
gap> (1,18,26)(2,16,27)(4,17,29)(5,20,30)(9,12,21)
gap> (3,28,19)(6,24,13)(7,23,11)(8,22,14)(10,25,15)
gap> (2,23,14)(7,27,19)(8,28,16)(9,29,18)(10,30,20)
gap> (4,26,12)
gap> (3,11,22)
gap> (2,3)(11,16)(22,27)
gap> (1,4)(12,17)(21,26)
gap> (5,15)
gap> <permutation group with 13 generators>
gap> <permutation group with 8 generators>
gap> gap> gap>
gap> |LAMBDA+| = 2720977920
gap> |LAMBDA| = 37791360
gap> N = 72
gap> |G+| = 2720977920
gap> |G| = |G+|/N = 37791360
gap> gap>
C:\GAP4R4\bin>
```

2.17 SUPERSKEWB

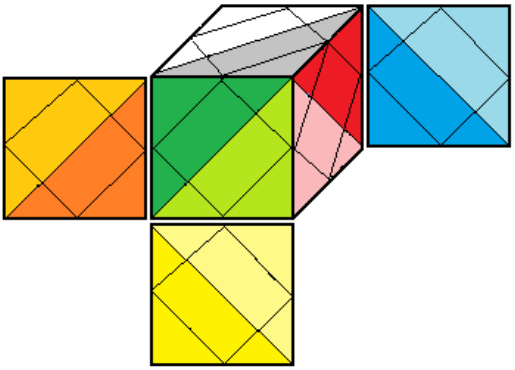
Un SuperSkewb (Skewb Uktimate, Golden Cube, Skewb Kite, ...) est un Skewb dont les centres sont orientés (2 orientations seulement). Il est très facile d'orienter les centres, il suffit d'installer un nouveau jeu de stickers comme indiquent les fig ci-dessous.



SuperSkewb1



SuperSkewb2



SuperSkewb3

Vous pouvez faire fabriquer ces stickers chez OliverSticker par exemple, ou vous faites vous même.

On oriente les centres de la façon suivante:

Pour chaque centre on décide arbitrairement un côté nommé dominant et on le marque '*' . Pour l'emplacement correspondant on marque 0 en face de '*' et '1' diamétralement opposé comme indique la fig3.

(HDA) ⇒ H=0, D=0, A=1,

(BDP) ⇒ B=0, D=1, P=0,

(BGA) ⇒ B=1, G=0, A=0

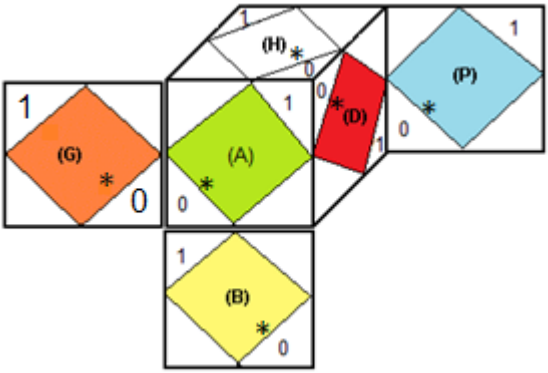
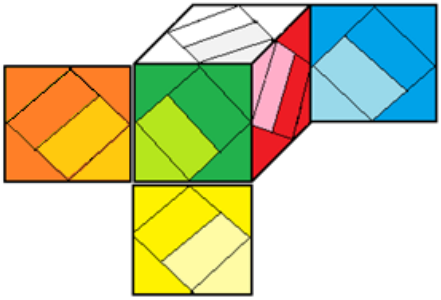


fig3: L'orientation des centres

Lorsque le côté dominant '*' pointe vers 0 l'orientation du centre vaut zéro 0 (bien orienté) , vers 1 l'orientation vaut 1 (mal orienté).

Voici les stickers correspondant à notre marquage.



SuperSkewb

(2.17.1) La table des orientations des centres

(H)=1, (B)=2, (A)=3, (P)=4, (G)=5, (D)=6

rotation	δ=permutation	t=orientation
A	(1,6,3)=(H,D,A)	(0,0,1,0,0,1)
G	(1,3,5)=(H,A,G)	(0,0,1,0,1,0)
P	(1,5,4)=(H,G,P)	(0,0,0,0,0,0)
D	(1,4,6)=(H,P,D)	(1,0,0,0,0,1)
B	(3,6,2)=(A,D,B)	(0,0,0,0,0,0)
O	(3,2,5)=(A,B,G)	(0,1,1,0,0,0)
H	(5,2,4)=(G,B,P)	(0,1,0,1,0,0)
E	(6,4,2)=(D,P,B)	(0,1,0,0,0,1)

On note G_s^+ le groupe des configurations du SuperSkewb

$G_s^+ = (S_4 \text{ x } \mathbb{Z}_3^4) \text{ x } (S_4 \text{ x } \mathbb{Z}_3^4) \text{ x } (S_6 \text{ x } \mathbb{Z}_2^6)$

Et G_s le groupe du SuperSkewb

$G_s = \left(A_4 \text{ x } \mathbb{Z}_3^3\right) \text{ x } \left(A_4 \text{ x } \mathbb{Z}_3^3\right) \text{ x } (A_6 \text{ x } \mathbb{Z}_2^5)$

La loi '.' dans G_s^+ est donnée par:

(v,y,w,z,δ,t), (v',y',w',z',δ',t')
$\in (S_4 \times \mathbb{Z}_3^4) \times (S_4 \times \mathbb{Z}_3^4) \times (S_6 \times \mathbb{Z}_2^6)$

(v,y,w,z,δ,t)(v',y',w',z',δ',t) =
(vv', y+v(y'), ww', z+w(z'), δδ',t+δ(t'))

vv' = v' o v

$v(y) = (y_{v(1)}, y_{v(2)}, y_{v(3)}, y_{v(4)})$

$\delta(t) = (t_{\delta(1)}, t_{\delta(2)}, \dots, t_{\delta(6)})$

Loi des centres : La somme des orientations des centres est un nombre pair.

$\sum t_i = 0 \pmod 2$ ou en abrégé $t = 0 \pmod 2$
on dit qu'il y a une conservation des flips .

Démonstration:

On va faire la démonstration par récurrence sur la longueur n = |V| de la formule.

On remarque la propriété est vraie pour n=0=|I|, puisque à l'état résolu, toutes les centres sont bien orientés.

On suppose que la propriété est vraie pour n, et on essaie de montrer qu'elle reste encore vrai pour (n+1)=|W|

On passe de V à W par une rotation de base Z, on a donc :

W= VZ

Soient (.., ,δ',t'), (..,,δ,t) et (..,q,h) les états associés à W, V et Z on a:

(δ',t') = (δ,t) (q,h) ; grâce à l'axiome (4) (*2.12.1)
D'où
t' = t + δ(h)

on a:

t = 0 (mod 2) ;HR
Or

h = 0 (mod 2) ;table des orientations des centres (*2.17.1)

d'où

δ(h) = 0 (mod 2)
car la permutation δ ne change rien sur le modulo.
finalement
t' = 0 (mod 2)
donc quel que soit l'état du Cube l'orientation des centres est toujours un multiple de 2.

la loi des centres est ainsi démontrée.

<u>Commentaire</u>

La loi des twists est valable seulement pour des mouvements qui conservent le camp, c'est-à-dire les permutations du type (a,b)(c,d)

c'est un élément du groupe K=Klein un sous groupe de A_4 par ex pour S

K = {id, (G,D)(B,H), (G,B)(H,D), (G,H)(B,D) }

On dit que le groupe K de Klein conserve l'orientation.

Matrice

On range les sommets Bas en une matrice comme ceci:

$$\varkappa = \begin{pmatrix} H & E \\ O & B \end{pmatrix} \quad \text{où } B, O, H, E \in \mathbb{Z}_3$$

et à chaque formule χ (qui pivote uniquement les sommets Bas) on associe une matrice $\varkappa$, de la façon suivante :

ln χ = $\varkappa$.

Par exemple:

T=[OH']^4 , F=[BO']^4

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On a :

ln T = θ , ln F = ζ

La dernière étape de la résolution d'un SuperSkewb consiste à pivoter les sommets Bas. Parfois on ne veut pas bouger le Cube par peur de perdre la référence, (comme la résolution du Golden Cube), et on ne reconnaît pas non

plus des orientations des sommets +1, -1 donc il est difficile de tenir le Cube comme il le faut pour appliquer les formules.

On peut résoudre le problème de façon aveugle ! grâce à la propriété de logarithmique ln

ln ab = ln a + ln b

Voici l'algorithme :

* si on a 4 sommets à pivoter on applique F

* si on a 2 sommets à pivoter on applique T.

On part d'un état $\varkappa = \ln \chi$ et on passe à un autre état $\varkappa'$ par $U \in \{F,T\}$

$\varkappa' = \ln \chi U = \ln \chi + \ln U$

a) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \pmod 3$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 3$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \pmod 3$

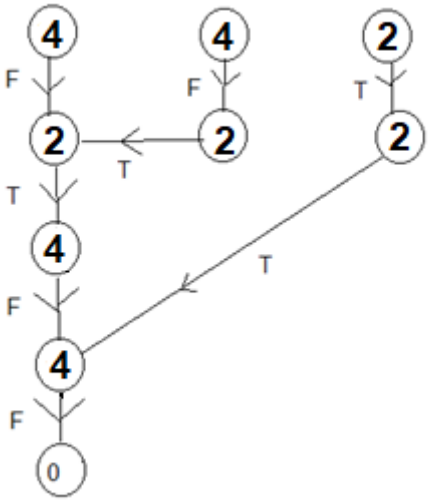
d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \pmod 3$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \pmod 3$

f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \pmod 3$

g) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \pmod 3$

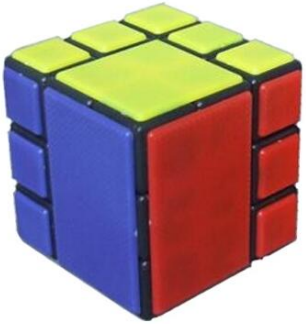
h) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \pmod 3$



le graphe de sortie

Le plus long chemin est FTTFF

3 LE SECRET DU BIGBLOCK



BigBlock

L'idée de bandage du Rubik's Cube est apparue pour la première fois chez Tony FISHER (1983), le fait de coller un certain nombre de pièces entre eux rend la résolution complètement différente. L'un des plus connus des bandages c'est précisément: le BigBlock.

Durant la résolution du BigBlock, j'ai remarqué une chose assez curieuse: Lorsqu'on place les deux sommets-Bas (BAD) et (BDP) les 4 sommets-Haut sont automatiquement bien placés (quitte à tourne H si besoin) !!! , On n'a pas besoin de permuter 2 sommets (transposer) ou de faire un 3-cycle, seule la rotation H suffit (les sommets-Haut sont déjà bien placés).

On pourrait dire cela autrement, si un sommet-Haut est bien placé alors les 3 autres seront automatiquement bien placés, comme on peut toujours bien placer un sommet en tournant H donc tous les 4 seraient bien placés en utilisant seulement H. Cette curieuse propriété provient d'une propriété étonnant de mathématique.

3.1 ENTRONS DANS L'AVENTURE ...

C'est vrai pourquoi n'a t-on pas besoin de permuter deux sommets ni de faire un 3-cycle pour bien placer les sommets-Haut quand les 2 sommets-Bas sont bien placés ?

Voyons cela de plus près :
Le BigBlock ne possède que deux rotations H, D qui effectuent les sommets. Le groupe des formules <H,D> engendré par H, et D génère un groupe de permutations des sommets $<H,D>_s$, nommé le groupe sommets de <H,D>. $<H,D>_s$ est évidemment un sous groupe de S_6 .

La remarque précédente, provient d'une propriété très curieuse du groupe $<H,D>_s$ découverte par D. SINGMASTER . En effet on a 6 sommets qui baladent par tout donc on s'attend à se trouver les 6!=720 permutations, c'est-à-dire $<H,D>_s = S_6$. Et bien D. SINGMASTER a montré que $<H,D>_s$ est beaucoup plus petit plus exactement 5!=120 éléments au lieu de 6!=720 éléments ! et encore ce groupe à 120 est très spécial, très connu ...

On comprend maintenant pourquoi on n'a pas besoin de permuter deux sommets, ni de faire un 3-cycle pour bien

placer les 4 sommets-Haut, car ce sont des configurations qu'on ne peut pas atteindre, autrement dit ce ne sont pas des éléments du groupe $<H,D>_S$.

3.2 VERS UN CHEMIN DIFFICILE …

On place les éléments de $\overline{F}_5$ sur le BigBlock comme indique la fig1
$\overline{F}_5 = \{0,1,2,3,4,\infty\}$

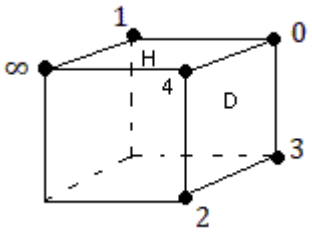
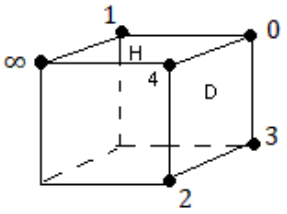
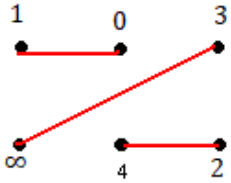


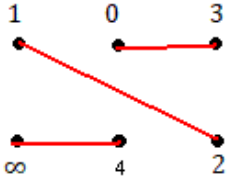
fig1

Formons nous les 5 motifs suivants:
a = { {1,0}, {∞,3}, {4,2} }
b = { {1,2}, {0,3}, {∞,4} }
c = { {1,∞}, {0,2}, {4,3} }
d = { {∞,0}, {1,4}, {2,3} }
e = { {∞,2}, {1,3}, {0,4} }
et soit E = { a, b, c, d, e } l'ensemble de ces 5 motifs

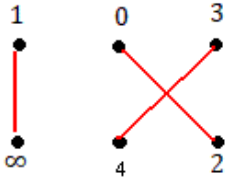




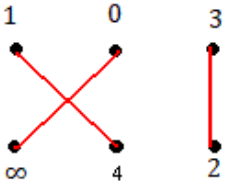
a



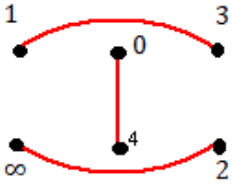
b



c



d



e

Soient p = 0→4→∞→1 et q = 0→3→2→4 les permutations associées à H et D (p,q ∈ S_6), on a donc $<H,D>_s$ = <p,q>
Voyons comment p agit sur E :
a = { {1,0}, {∞,3}, {4,2} }
a•p = { {0,4}, {1,3}, {∞,2} }=e
a→e

b = { {1,2}, {0,3}, {∞,4} }
b•p = { {0,2}, {4,3}, {1,∞} }=c
b→c

c = { {1,∞}, {0,2}, {4,3} }
c•p = { {1,0}, {4,2}, {∞,3} }=a
c→a

d = { {∞,0}, {1,4}, {2,3} }
d•p = { {1,4}, {0,∞}, {2,3} }=d
d→d

e = { {∞,2}, {1,3}, {0,4} }
e•p = { {1,2}, {0,3}, {4,∞} }=b
e→b

u=a→e→b→c
c'est-à-dire a•p est un élément de E, b•p est un élément de E, etc ....
à p∈S_6 on associe un u∈S_E
p→u∈S_E tel que u(x)=x•p où x∈E

De même pour q
a•q=e
b•q=d
c•q=c

d•q=a
e•q=b
v=a→e→b→d
c'est-à-dire a•q est un élément de E, b•q est un élément de E, etc ....
à $q \in S_6$ on associe un $v \in S_E$
$q \to v \in S_E$ tel que v(x)=x•q où x∈E

p et q agissent sur E donc le groupe <p,q> agit sur E.
Maintenant nous pouvons répondre à notre question.
Supposons qu'il existe une permutation qui échange seulement 2 sommets Haut par ex r=(∞,1) alors :

r=(∞,1)
a = { {1,0}, {∞,3}, {4,2} }•r={ {∞,0}, {1,3}, {4,2} }
b = { {1,2}, {0,3}, {∞,4} }•r={ {∞,2}, {0,3}, {1,4} }
c = { {1,∞}, {0,2}, {4,3} }•r={ {∞,1}, {0,2}, {4,3} }
d = { {∞,0}, {1,4}, {2,3} }•r={ {1,0}, {∞,4}, {2,3} }
e = { {∞,2}, {1,3}, {0,4} }•r={ {1,2}, {∞,3}, {0,4} }

a•r ∉E, r n'agit pas sur E donc r n'est pas un élément du groupe <p,q>, c'est donc une configuration impossible à atteindre.
de même pour un 3-cycle s=(∞,1,0) par ex:
s=(∞,1,0)
a = { {1,0}, {∞,3}, {4,2} }•s={ {0,∞}, {1,3}, {4,2} }
b = { {1,2}, {0,3}, {∞,4} }•s={ {0,2}, {∞,3}, {1,4} }
c = { {1,∞}, {0,2}, {4,3} }•s={ {0,1}, {∞,2}, {4,3} }
d = { {∞,0}, {1,4}, {2,3} }•s={ {1,∞}, {0,4}, {2,3} }
e = { {∞,2}, {1,3}, {0,4} }•s={ {1,2}, {0,3}, {∞,4} }

a•s ∉E, s n'agit pas sur E donc s n'est pas un élément du groupe <p,q>, c'est donc une configuration impossible à

atteindre.

Et voilà le travail, le truc c'est de trouver un objet qui laisse agir par $<H,D>_s$, on a trouvé E l'ensemble de ces 5 motifs ci-dessus.

3.3 ENCORE PLUS LOIN …

On a répondu à notre question, mais on ne sait pas combien le $<H,D>_s$ est petit. Voyons
La permutation p donne la permutation u=a→e→b→c de E , et q en donne une autre v = a→e→b→d , maintenant on va associer un élément de <p,q> à une permutation de $<u,v> \subset S_E$ de la façon suivante:
f: <p,q> → <u,v>
p → u : f(p) = u
q → v : f(q) = v

C'est évidemment un homomorphisme, elle est clairement surjective , en effet on trouve toujours un antécédent par ex pour :
$r = u^2vuv^{-1} \rightarrow f(p^2qpq^{-1}) = r$
on va voir qu'elle est aussi injective. Comme c'est un homomorphisme il suffit de montrer que son noyau se réduit à l'identité.

f injective
Notons I l'identité de <u,v>
on prend donc t , un élément de <p,q> tel que f(t) = I

il faut montrer que t=id.
(f(t) est une permutation de E, f(t) = I ça signifie que I laisse E fixe: I(a)=a, I(b)=b, I(c)=c, etc ...)
rappel
a = { {1,0}, {∞,3}, {4,2} }
b = { {1,2}, {0,3}, {∞,4} }
c = { {1,∞}, {0,2}, {4,3} }
d = { {∞,0}, {1,4}, {2,3} }
e = { {∞,2}, {1,3}, {0,4} }

supposons que t(∞) = 0
dans e: t(∞) = 0 oblige t(2)=4 car I(e)=e
dans c: t(∞) = 0 oblige t(1)=2 car I(c)=c
dans b: t(1) = 2 oblige t(2)=1, car I(b)=b, mais t(2)=1 contradictoire avec t(2)=4 donc t(∞)≠0,

même raisonnement montre que t(∞)≠1,2,3,4 seul cas possible t(∞)=∞
et le même travail donne
t(0)=0, t(1)=1, t(2)=2, t(3)=3, t(4)=4 c'est à dire t=id, f est donc injective, et finalement elle est bijective.
Et c'est presque fini, un programme en GAP donne l'ordre de |<u,v>| = 120 = 5!, on a donc bien
$|\langle u,v\rangle| = |\langle H,D\rangle_s| = 120 = 5!$

Au lieu d'avoir S_6 on a S_5 !!!

Remarque : On peut donner une démonstration en donnant la liste des éléments de $\langle H,D\rangle_s$: On compte le

nombre d'éléments et on observe qu'il n'y a pas de 2-cycles ni de 3-cycles,

Voici un script en GAP :

a:= (1,5,6,2); b:=(1,4,3,5); # < H,D >

G := Group(a,b);

Size(G);

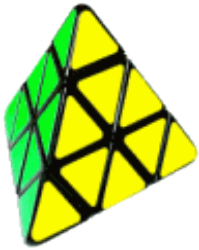
List(G) ;

```
gap> gap> gap> gap> gap> gap> gap> (1,5,6,2)
(1,4,3,5)
gap> Group([ (1,5,6,2), (1,4,3,5) ])
gap> 120
gap> gap> [ (), (1,2,6,5), (1,5,3,4), (1,6)(2,5), (1,3)(4,5), (1,4,3,5), (2,5,3,6),
  (1,2)(3,5), (1,5,4)(2,3,6), (1,6,5,3), (1,3,6,2,4,5), (1,4,3,6,2),
  (2,3)(5,6), (1,2,3,6), (1,5,6,3,2,4), (1,6,2,3,5), (1,3,2)(4,5,6),
  (1,4,3,2,5,6), (2,6,3,5), (1,2,5,6,3), (1,5,2,6,4), (1,6,3,2),
  (1,3,4,5,2,6), (1,4,3)(2,6,5), (2,4,6,5), (1,2,4,5,6), (1,5,2)(3,4,6),
  (1,6,2,4), (1,3)(2,5)(4,6), (1,4,6)(2,3,5), (3,5)(4,6), (1,2,6,4,5,3),
  (1,5,4,6), (1,6,4)(2,5,3), (1,3,4,6,5), (1,4,6,3), (2,5,6,4), (1,2)(4,6),
  (1,5,6)(2,3,4), (1,6,4,5), (1,3)(2,4)(5,6), (1,4,2)(3,5,6), (2,3,6,4,5),
  (1,2,3,5,6,4), (1,5,2,4,3,6), (1,6,4,2,3), (1,3,6,5,2), (1,4)(2,5)(3,6),
  (2,6,4,3), (1,2,5)(3,6,4), (1,5,3,2,6), (1,6,4,3,5,2), (1,3,2,6,5,4),
  (1,4,5)(2,6,3), (2,4,5,3), (1,2,4)(3,6,5), (1,5,4,3,2), (1,6)(2,4)(3,5),
  (1,3,2,5), (1,4)(2,3), (3,6,5,4), (1,2,6)(3,5,4), (1,5)(3,6),
  (1,6,2,5,4,3), (1,3,6,4), (1,4,5,3,6), (2,5,4,6,3), (1,2)(3,6)(4,5),
  (1,5)(2,3)(4,6), (1,6,3,5,4), (1,3,2,4,6), (1,4,6,5,3,2), (2,3,5,4),
  (1,2,3)(4,6,5), (1,5)(2,4), (1,6)(2,3)(4,5), (1,3,4,2), (1,4,2,5,3),
  (2,6)(4,5), (1,2,5,4), (1,5)(2,6)(3,4), (1,6,5,4,2), (1,3)(2,6),
  (1,4)(2,6)(3,5), (2,4,3,5,6), (1,2,4,3), (1,5,6,2), (1,6,5)(2,4,3),
  (1,3,4)(2,5,6), (1,4,5,6,2,3), (3,4,5,6), (1,2,6,3,4), (1,5,6,4,3),
  (1,6,3,4,2,5), (1,3,5,6), (1,4)(5,6), (2,5)(3,4), (1,2)(3,4)(5,6),
  (1,5,2,3), (1,6)(3,4), (1,3,5,2,4), (1,4,5,2), (2,3,4,6), (1,2,3,4,5),
  (1,5,3)(2,4,6), (1,6,5,2,3,4), (1,3,5,4,6,2), (1,4,6,2,5), (2,6,5,3,4),
  (1,2,5,3,4,6), (1,5,4,2,6,3), (1,6,2)(3,4,5), (1,3,5)(2,6,4), (1,4,2,6),
  (2,4)(3,6), (1,2,4,6,3,5), (1,5,3,6,4,2), (1,6,3)(2,4,5), (1,3,6)(2,5,4),
  (1,4,2,3,6,5) ]
gap>
C:\GAP4R4\bin>
```

4 LE PYRAMINX

4.1 DESCRIPTION

Pyraminx (tétraèdre)



Pyraminx

Le Pyraminx est inventé en 1971 par Uwe MEFFERT, c'est un tétraèdre dont chaque face portant une couleur, il est composé de 22 pièces. Lorsqu'on mélange le puzzle les pièces se déplacent ce qui fait que les faces perdent sa couleur initiale (en sortant de l'usine). Le but c'est de reconstituer le Pyraminx à l'état d'origine, chaque face portant une seule couleur.

- Le Pyraminx vérifie la formule d'Euler:

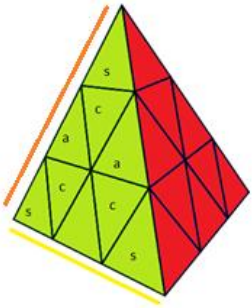
F = Face, S = Sommet, A = Arête,

F +S = A+2

- Pyraminx* = Pyraminx (son propre dual)

- Le nombre de stickers sur une face:
$1+3+5 = 3^2$
C'est la somme des n nombres impairs consécutifs

Les notations



s=sommet, c=centre, a=arête

Les faces seront notées entre parenthèses: (A)=face Avant, (G)=face Gauche, (D)=face Droite, (B)=face Bas .

Observation

Comme nous avons déjà dit plus haut, le Pyraminx est formé par 22 pièces divisées en 3 catégories:

1. Les centres (12) : portant une seule couleur, ils se regroupent 3 par face , ils tournent autour de leur sommet.

2. Les arêtes (6): portant 2 couleurs, elles se déplacent librement, et ont 2 orientations.

3. Les sommets (4): portant 3 couleurs, ils ne se déplacent pas mais peuvent se pivoter.

Les arêtes ne se mettent jamais à une place des sommets, ou des centres et inversement. Chaqu'un reste dans son camp, les arêtes dans le camp des arêtes, les sommets dans le camp des sommets, les centres dans le camp des centres.

Dans cette partie on s'intéresse seulement les arêtes.

4.2 ORIENTER LE TWIST

On va fixer le twist ou orienter le twist, càd désigner qui est la face Avant, la face Bas .... Posez donc le twist sur la table avec une face devant vous , pour nous on a 4 faces et 4 couleurs associées ainsi (dans cet ordre):

B(as)=j(aune), A(vant)=v(ert), G(auche)=o(range), D(roite)=r(ouge)

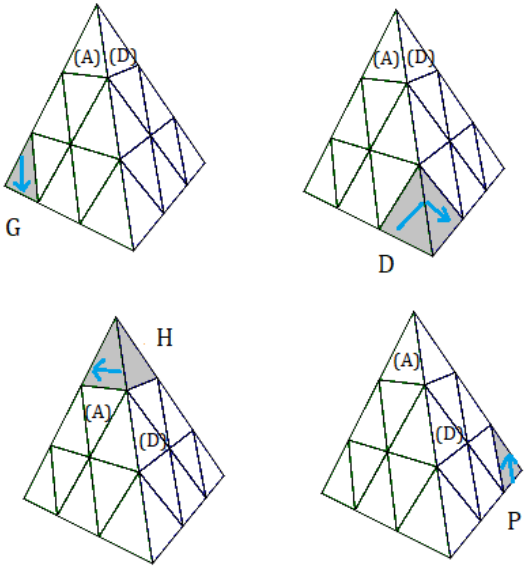
c'est l'orientation usuelle du Pyraminx.

4.3 LES ROTATIONS

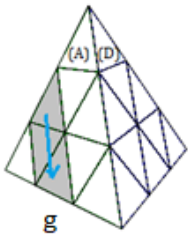
Voici les rotations (par rapport aux sommets) :
G(auche), D(roite), H(aut), P(ostérieur).
(BGA) = G, (BAD) = D, (AGD) = H, (BDG) = P
G = tourner 120° dans le sens des aiguilles d'une montre.
G' = tourner -120° ("-" = anti-horaire)
G^2 = tourner 240°

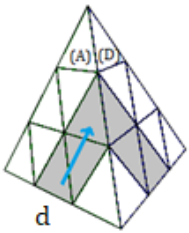
On note (AD) pour dire l'arête Avant-Droite et (AD)° inverser l'arête (AD)

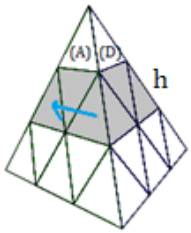
<u>Rotations sommets</u> :

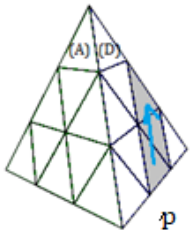


Les rotations tranches :

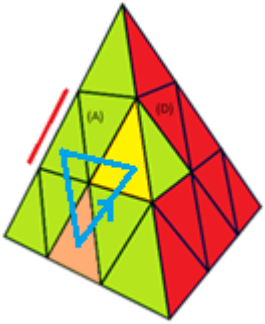








Les rotations



[gd']=gd'g'd

On ajoute deux autres rotations nommées rotations étendues :

Rotation étendue $\Gamma = (AD)^+$: Inverser l'arête (AD)

1. On enlève l'arête (vr)
2. L' Inverse 180°
3. Puis on la remet

Rotation étendue $\Omega = (AD,AG)$: Permuter deux arêtes

1. On enlève les arêtes (vr), (vo)
2. Permute (vr)↔(vo)
3. Puis on les remet

(c'est comme si les pièces ne sont pas attachées au core, elles bougent librement, Pyraminx sans core)

4.4 MARQUAGE DES FACETTES

* Sommets : B=0 puis dans le sens horaire 1,-1, A=0 puis dans le sens horaire 1,-1,
* Centres (comme les sommets) : B=0 puis dans le sens horaire 1,-1, A=0 puis dans le sens horaire 1,-1,
* Arêtes : Imaginez qu'on a des "emplacements" à 2 facettes marquées comme indique la fig1 ci-dessous

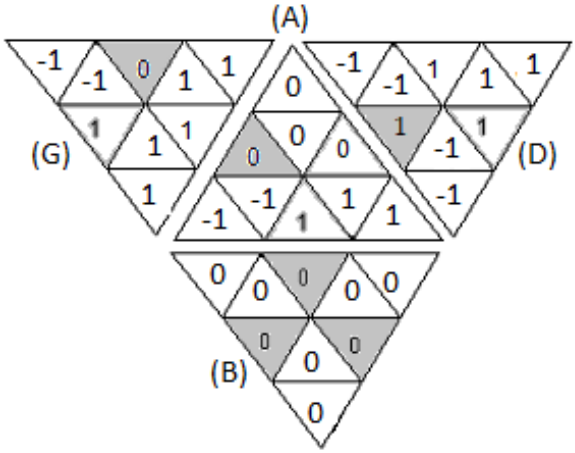
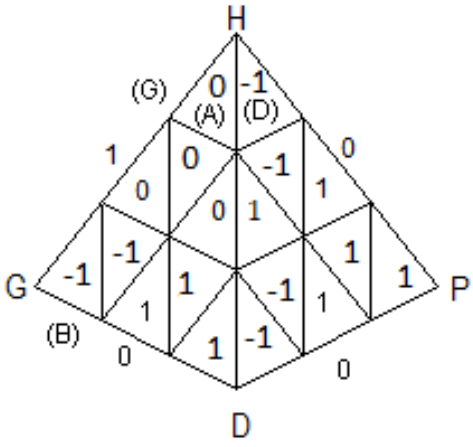


fig1



C'est le marquage usuel du Pyraminx.

Ce marquage nous donne l'ordre des faces et des couleurs ainsi:

B > A > G > D

j > v > o > r

¤ Un emplacement est un objet à facettes , et porte un nom, les initiales des facettes qui le composent avec la règle :

facette dominante en premier

Ce qui nous donne les 6 noms des emplacements, dans cet ordre .

Les emplacements :

(AD), (AG), (GD), (BA), (BG), (BD).

4.5 COULEUR DOMINANTE

Les couleurs dominantes : jaune > vert > orange > rouge (les couleurs dont le marquage est zéro 0)
* Les sommets (numérotés) ayant 3 couleurs dont l'une est dominante (couleur marquée zéro 0).
* Les centres (numérotés) ayant 3 couleurs dont l'une est dominante (couleur marquée zéro 0).

* Une arête est un objet à couleurs (dont l'une est dominante) , et porte un nom, les initiales des couleurs qui la composent avec la règle :

couleur dominante en premier

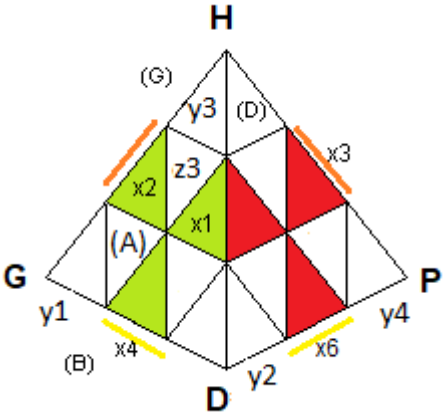
Ce qui nous donne les 6 noms d'arêtes , dans cet ordre .

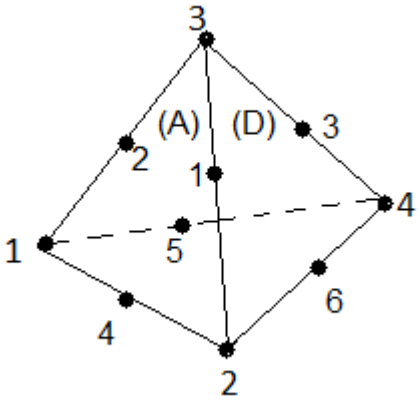
Les arêtes :

(vr), (vo), (or), (jv), (jo), (jr).

4.6 NUMEROTATION

On numérote les sommets y_i , centres z_i , et les arêtes x_1 , x_2 , ... ainsi :



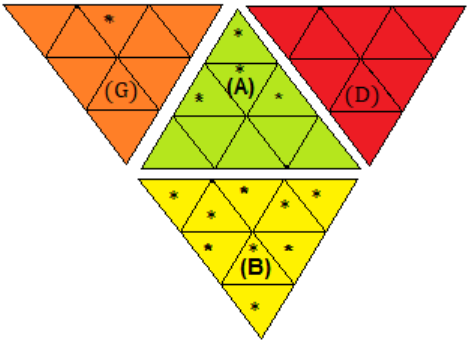


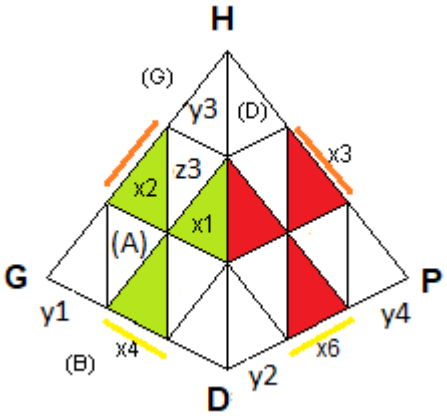
(vr)=x_1, (vo)=x_2, (or)=x_3,
(jv)=x_4, (jo)=x_5, (jr)=x_6

et à l'état résolu elles sont dans leur emplacement :

(AD)=x_1 , (AG)=x_2 , (GD)=x_3,
(BA)=x_4 , (BG)=x_5 , (BD)=x_6 .

Remarque : Les y_i , z_i , x_i sont placés sur les marquages zéro 0 .

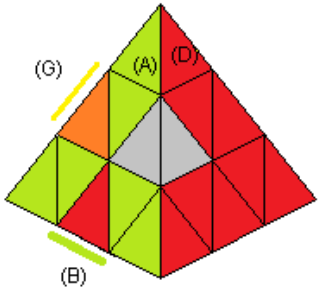




Couleurs dominantes "*"

4.7 L'ORIENTATION DES ARETES

* Quand la couleur dominante du sommet y_i se trouve sur une facette marquée 0,1,-1 son orientation vaut 0,1,-1
* Quand la couleur dominante du centre z_i se trouve sur une facette marquée 0,1,-1 son orientation vaut 0,1,-1
* Les arêtes x_i se baladent d'emplacement en emplacement pour se loger dans des emplacements (BA), (GD)..., à chaque fois que la couleur dominante se trouve sur une facette marquée 1 son orientation vaut 1 (1 flip) , sinon elle vaut 0 zéro, par exemple l'arête (vr)=x_1 se place dans (BA) avec vert=B, alors x_1 vaut 0 (0 flip) car la couleur dominante vert est sur la facette marquée 0, de même si l'arête (jo)=x_5 se trouve dans (AG) avec jaune=G, alors x_5 = 1 (1 flip) car la couleur dominante jaune se trouve sur 1 .



x_1=0, x_5=1

4.8 L'ENSEMBLE DES CONFIGURATIONS G+

Pour les arêtes, on imagine que le Pyraminx n'a pas de core, les arêtes bougent librement comme on a 6 arêtes on a affaire à S_6 . En se déplaçant les arêtes pivotent aussi, càd elles changent l'orientation on a alors affaire à $\mathbb{Z}_2^6$

Les sommets ne bougent pas, ils tournent, ça signifie qu' ils ont 3 orientations on a donc affaire à $\mathbb{Z}_3^4$

Les 3 centres tournent autour de leur sommet, on peut les considérer comme un gros sommet à 3 orientations on a donc affaire à $\mathbb{Z}_3^4$

Finalement on pose donc :
$G^+ = S_6 \times \mathbb{Z}_2^6 \times \mathbb{Z}_3^4 \times \mathbb{Z}_3^4$

$\mu = (u, x, y, z) \in G^+$
$u \in S_6$
$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{Z}_2^6$,
$y = (y_1, y_2, y_2, y_4) \in \mathbb{Z}_3^4$,
$z = (z_1, z_2, z_2, z_4) \in \mathbb{Z}_3^4$,

G^+ c'est l'ensemble des configurations (on imagine qu'on peut désassembler le Pyraminx et on le remonte au hasard) .

4.9 RECHERCHE UNE LOI SUR $(G^+,.)$

On veut définir une loi '.' sur G^+.

$\mu = (u,x,y,z)$, $\mu' = (u',x',y',z')$

$\mu\mu' = (u,x,y,z)\,(u',x',y',z') = (u'',x'',y'',z'')$?

Pour les sommets et les centres il est claire que

$y'' = y+y'$

$z'' = z+z'$

car on est dans $\mathbb{Z}_3^4$

$u'' = uu'$

la seule difficulté se trouve en $x'' = ?$

Commençons par voir ce qui se passent sur les arêtes (u,x) (on ignore les sommets et les centres) pour les rotations {g, d, h, p} (les rotation G,D,H,P ne touchent pas les arêtes).

à chaque rotation $Z \in \{g, d, h, p\}$ on cherche l' état correspondants $\mu_z = (j,a)$

$j \in S_6$ et une orientation $a \in \mathbb{Z}_2^6$ on écrit

$Z \rightarrow \mu_z = (j,a)$ et voici la table d'orientation du Pyraminx

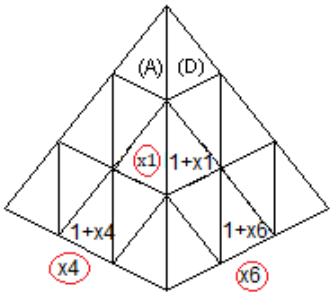
(4.9.1) La table d'orientation

rotation	j=permutation	a=orientation
g	(2,4,5)	(0,0,0,1,1,0)
d	(1,6,4)	(1,0,0,0,0,1)
h	(1,2,3)	(1,0,1,0,0,0)
p	(3,5,6)	(0,0,0,0,1,1)
Γ	id	(1,0,0,0,0,0)
Ω	(1,2)	(0,0,0,0,0,0)

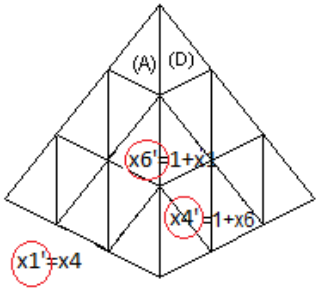
On se donne une formule T∈<g,d,h,p> et T≠I (l'état associé μ=(u",x")), mais la formule T≠I commence par une rotation dans {g,d,h,p}, d par ex (l'état associé (j,a) et le reste V (l'état associé (u,x)), on a donc

T = dV

(u",x") = (j,a)(u,x)
il est clair qu'on aura u" = ju (ju = u o j)
voyons pour x'".
D'après le marquage on a:
(AD)=(x_1,1+x_1), (BA)=(x_4,1+x_4), (BD)=(x_6,1+x_6).
Les x_i sont placés sur 0 (la couleur dominante) .



Avant la rotation d



Après la rotation d

Rotation d: d → (j,a) état
Permutation: j = 1→4→6 = (1,4,6)

$x''_1 = x_4$
$x''_4 = 1 + x_6$
$x''_6 = 1 + x_1$
Orientation: a = (0,0,0,1,0,1)

d'où:
x" = a + j(x)

Ce qui suggère la loi '.' dans G^+ :

$\mu=(u,x,y,z)$ et $\mu'=(u',x',y',z') \in S_6 \times \mathbb{Z}_2^6 \times \mathbb{Z}_3^4 \times \mathbb{Z}_3^4$
$\mu\mu' = (u,x,y,z)(u',x',y',z') = (uu', x+u(x'), y+y', z+z')$

avec

uu' = u'ou

$u(x) = (x_{u(1)}, x_{u(2)}, \ldots, x_{u(6)})$; on permute les composantes de x par u.

<u>Vérifions la loi pour gd</u> :

La rotation g:
Soit $\lambda=(j,a)$ l'état associé à la rotation g: $g \rightarrow \lambda$
Permutation: $j = 2\rightarrow4\rightarrow5 = (2,4,5)$
Orientation: $a = (0,0,0,1,1,0)$

La rotation d:
Soit $\delta=(q,b)$ l'état associé à la rotation d: $d \rightarrow \delta$
Permutation: $q = 1\rightarrow4\rightarrow6 = (1,6,4)$
Orientation: $b = (1,0,0,0,0,1)$
$\lambda\delta = (j,a)(q,b) = (jq, a+j(b))$

jq=(2,4,5)(1,6,4)=(1,6,4,5,2)
x' = a + j(b)

$x'_1 = 0 + b_1 = 0 + 1$
$x'_2 = 0 + b_4 = 0 + 0$
$x'_3 = 0 + b_3 = 0 + 0$

$x'_4 = 1 + b_5 = 1 + 0$
$x'_5 = 1 + b_2 = 1 + 0$
$x'_6 = 0 + b_6 = 0 + 1$

$x' = (1,0,0,1,1,1)$

On retrouve bien ce qui ce passe sur le Pyraminx quand on fait gd.

Finalement on définit la loi '.' sur G^+ ainsi :

$G^+ = S_6 \times \mathbb{Z}_2^6 \times \mathbb{Z}_3^4 \times \mathbb{Z}_3^4$

$\mu=(u, x, y, z)\in G^+ , u\in S_6 , x\in\mathbb{Z}_2^6 , y\in\mathbb{Z}_3^4 , z\in\mathbb{Z}_3^4$

la loi : $(u, x, y, z)(u', x', y', y') = (uu', x+u(x'), y+y', z+z')$

$uu' = u'ou$

$u(x) = (x_{u(1)}, x_{u(2)}, ..., x_{u(6)})$

4.10 LES FORMULES (M, .)

On pose :

$M = < G, D, H, P, g, d, h, p >$

On dit que M est engendré par les rotations de base {G, D, H, P, g, d, h, p} . Une formule est donc une suite finie de rotations de base (et leur inverse bien sûr) avec la règle :

* On convient d'éviter de faire GG', G'G, ... , gg', g'g, ... etc ... dans une formule.

par ex:

HDghPd'p^2dg' ; ok

P^2gphh'd^2g'p ; interdit : car hh'

GDP'Php'h^2d'g ; interdit : car P'P

hHdh'd' ; ok

Une rotation de base ou leur inverse est donc une formule.

On muni sur M la loi '.' concaténation V.T=VT : V suivi de T:

⇒ 1) Soient V, T deux formules , il est clair que VT est encore une formule ; loi interne

⇒ 2) On pose:

HH' = H'H = ... hh' = h'h = ... = I

On a : VI = IV = V

I se nomme formule Identique ou neutre, ou vide, (I = on ne fait rien).

⇒ 3) Pour toute formule V il y une formule inverse V' par ex:

$V = hp'd^2Pg'd$

$V' = d'gP'd'^2ph'$; lire V à l'envers et prime↔non-prime

et on a alors :

$VV' = V'V = I$

⇒ 4) Soient V,T,S trois formules , si on fait (VT) puis S c'est la même chose si on fait V puis (TS) càd on a:

(VT)S = V(TS) ; associatif

Ces 4 propriétés confère (M, .) une structure de groupe

Formules étendues $(M^+, .)$:

Un formule étendue est une suite finie de rotations contenant au moins une rotation étendue, du genre $Dh\Gamma p\Omega'hg^2$ ...

Là aussi il est interdit de faire GG', G'G, ..., gg', g'g , ΓΓ' , Γ'Γ, ...

Une rotation étendue est donc une formule étendue par ex la rotation étendue Γ.

On pose

$M^+ = < G, D, H, P, g, d, h, p, \Gamma, \Omega >$

M = l'ensemble des formules, M^+ = l'ensemble des formules étendues.

$(M^+, .)$ est aussi un groupe et (M, .) est un sous groupe de $(M^+, .)$

La Longueur d'une formule :

La longueur d'une formule V c'est le nombre de rotations qu'elle contient et on la note |V| , par ex:

|I| = 0 il n'y a aucune rotation dans I

|g| = 1, |g'|=1, $|g^2| = 2$,

$S = Gd^2g'd'h^2p'^2$, $V = \Gamma\Omega d^2gp'$

|S| = 9, |V| = 6

Parmi les formules qui donnent l'état μ, il y a des formules de longueur minimale, souvent on utilise cette formule minimale par défaut.

L'ordre d'une formule :

L'ordre d'une formule V , c'est le plus petit entier positif d tel que $V^d = I$ et on le note ord(V) = d

$G^3 = I \Longrightarrow ord(G) = 3$

$[gd]^3 = (gdg'd')^3 = I \Longrightarrow ord([gd]) = 3$

$(gd)^{15} = I \Longrightarrow ord(gd) = 15$

4.11 LES ETATS DE BASES

à chaque rotation de base Z on associé une configuration μ_Z nommé état base

$Z \rightarrow \mu_Z$: $G \rightarrow \mu_G$, $D \rightarrow \mu_D$, $h \rightarrow \mu_h$, ...

Puis on définit la fonction $\mathcal{X}$ de M sur G^+ ainsi

$\mathcal{X} : M \rightarrow G^+$

$\mathcal{X}(G) = \mu_G$, $\mathcal{X}(D) = \mu_{BD}$, $\mathcal{X}(h) = \mu_h$, ...

Puis proplonge en formule :

V = GDhp

$\mathcal{X}(V) = \mu_G\mu_D\mu_h\mu_p$

et qui vérifie ;

1) $\mathcal{X}(I) = e$

2) $\mathcal{X}(VT) = \mathcal{X}(V)\,\mathcal{X}(T)$

3) $\mathcal{X}(V) = \mathcal{X}(T) \Rightarrow V = T$;($\mathcal{X}$ est injective)

Note : (3) signifie que, par définition, deux foumules qui donnent la même configuration sont considérées comme identiques,

$\mathcal{X}$ est bijective donc M est fini car G^+ est fini

deux formules donnant la même configuration sont identiques.

4.12 L'ACTION '•' DE M SUR G^+

Maintenant on va définir une action libre et compatible '•' de M sur G^+ .

$G^+ \times M \rightarrow G^+$

$(\mu, V) \rightarrow \mu \bullet V = \nu \in G^+$

A_1) $\forall \mu$; $\mu \bullet I = \mu$;élément neutre

A_2) $\forall \mu, V, T$; $(\mu \bullet V) \bullet T = \mu \bullet (VT)$;associatif

A_3) $e \bullet V = e \Rightarrow V = I$

Si quelqu'un fixe e c'est forcement I , I est la seule formule qui fixe tout le monde.

A_4) $\forall V, T$; $e \bullet (VT) = (e \bullet V)\ (e \bullet T)$;compatibilité des lois de M et G

4.13 LE GROUPE DU PYRAMINX G

On pose:

$G = \{\mu \in G^+ \mid \mu = e \bullet V , V \in M\}$; e=état résolu

Par définition (G, .) est le groupe du Pyraminx, c'est un sous groupe de $(G^+, .)$

C'est l'ensemble des configurations provenant de M (à partir de e). Les éléments de G s'appellent "état".

Remarque : l'axiome (A_3) montre que deux formules donnant le même état seront considérées comme identiques .

En effet

$e \bullet V = e \bullet T$ il faut montrer V = T, allons-y

$(e \bullet V) \bullet T' = (e \bullet T) \bullet T'$

$e \bullet (VT') = e \bullet (TT')$

$e \bullet (VT') = e \bullet I = e$

on a :

$e \bullet (VT') = e$ et

$e \bullet I = e$

d'après (A_3) $VT' = I \Longrightarrow V = T$

4.14 THEOREME FONDAMENTAL

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu' une configuration soit un état ?

Soit $\mu = (u,x,y,z) \in G^+$:

(4.14.1) On désigne (F), (P) les lois suivantes:

$$(F) \sum_{i=1}^{6} x_i = 0 \pmod 2 \text{ ou abrégé } x = 0 \pmod 2$$

$$(P)\ sig(u) = 1$$

Théorème fondamental :

on pose :

$K = \{\mu \in G^+ \mid \mu \text{ vérifie (F) et (P) }\}$

Alors

$K = G$

μ vérifie (F),(P) $\Leftrightarrow \mu \in G$

Démonstration :

Ici on oublie le Pyraminx, laisse le dans un placard, on traivaille dans G^+ , càd un Pyraminx démonté .

Les rotations s'appliquent sur les configurations ceci a un sens car l'action '•' est définie sur G^+ , les formules servent

à fabriquer les configurations et non pour résoudre le Cube.

¤ (⇒) On se donne une configuration μ=(u,x,y,z) qui vérifie (F),(P), il faut montrer μ∈G

On va faire ça en plusieurs étapes.

On coupe (u,x,y,z) en deux morceaux

(u, x,y,z) = (id, 0,y,z) (u, x,0,0)

→On s 'occupe la configuration (id, 0,y,z) :

0) On veut construire y et z (indépendamment) à partir des rotations de base.

Avec les rotations de base, on obtient y, z facilement c'est intuitif. ce n'est pas grave si on touche les arêtes car on les s'occupera plus tard , la manipulation nous founit une formule V1 telle que :

$e \bullet V_1 =$ (id, 0,y,z) ∈G

→On s 'occupe (u, x,0,0) :

On veut construire u puis x à partir des rotations de base.

On prend 2 formules suivantes :

W = [dh] = (BA)->(AD)->(GD) c'est un 3-cycle-arête sans toucher les autres pièces

Q = [dh'][g'h] = $(AG)^+$ $(BA)^+$ pivote 2 arêtes sans toucher les autres pièces

Fabriquer u

sig(u)=1 $\Longrightarrow$ u$\in A_6$ or A_6 est engendré par des 3-cycle donc on peut utiliser W (avec les conjugaisons) pour placer les arêtes comme on veut, donc W « atteint » u , u provient d'une formule .

Fabriquer x,

On utilise Q (avec les conjugaisons) pour orienter les arêtes comme exige x, c'est possible car la loi des flips (F) dit on oriente toujours 2 arêtes. en mettant tout ensemble on a une formule V_2 telle que:

$e \bullet V_2 = (u, x, 0, 0) \in G$

Finalement (u,x,y,z)$\in$G , car G est un groupe.

¤ ($\Leftarrow$) Inversement ,

on part d'un état $\mu \in G$,$\mu = e \bullet V$, $V \in M$.

Il faut montrer que μ vérifie (F),(P).

On va raisonner par récurrence sur la longueur de |V| = n

* pour n = 1 $\Longrightarrow$ V = Z = rotation de base

or d'après la table d'orientation (*4.9.1) , les rotations tranches Z montre que l'état e•Z vérifie (F),(P) , donc ces lois sont vérifiées pour n = 1

* Supposons que ces lois sont vraies pour n , montrons qu'elles reste encore vraies pour n+1.

Soit T une formule de longueur n+1 et e•T = (u',x',y',z') l'état associé. On passe de n (Q, et l'état associé e•Q = (u,x,y,z)) à n+1 par une rotation tranche Z (l'état associé e•Z = (j,a,0,0)):

T = QZ

e•T = e•(QZ) = (e•Q)(e•Z) ;axiome (A_4)

(u',x',y',z') = (u,x,y,z)(j,a,0,0) = (uj, x+u(a),y+0,z+0)

(P) : u' = uj

sig(u) = 1 ; HR

sig(j) = 1 ;tab d' orientation (*4.9.1)

sig(u') = sig(u)sig(j) = 1

(F) : x' = x + u(a)

x = 0 (mod 2) ;HR

a = 0 (mod 2) ;tab d' orientation (*4.9.1)

u(a) = 0 (mod 2)

x' = 0 (mod 2)

donc ces lois sont vraies pour tout n, autrement dit μ vérifie (F),(P).

$G = A_6 \times \mathbb{Z}_2^5 \times \mathbb{Z}_3^4 \times \mathbb{Z}_3^4$; th: G=l'ensemble des configurations qui vérifient les lois .

|G| = 75582720

On a aussi :

$$|G| = \frac{|G^+|}{\mathcal{N}}$$

où $\mathcal{N}$ = Le nombre de contraints = nombre de choix.

Pour trouver $\mathcal{N}$ il suffit de regarder les lois (F) et (P) (voir (4.15.1)).

Pour (F) ⇒ 2 choix

Pour (P) ⇒ 2 choix

d'où $\mathcal{N}$ = 2.2

$$|G| = \frac{|G^+|}{\mathcal{N}} = \frac{6! \,.\, 2^6 . 3^4 . 3^4}{4} = \frac{302330880}{4} = 75582720$$

On retrouve le même résultat.

4.15 LE GROUPE DES PERMUTATIONS (Λ,.)

Pour vérifier si on a |G| et $|G^+|$ correctement, on utilise les permutations (des autocollants).

L'ensemble des autocollants X

Soit X, l'ensemble des 36 autocollants. On numérote les autocollants de telle sorte qu'on puisse regrouper facilement en arêtes :

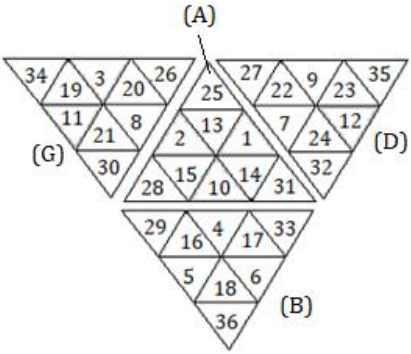
$x_i = (i, i+6)$

On numérote les 36 autocollants ainsi :

* On numérote les arêtes 1 à 12

* Puis les centres 13 à 24

* Puis les sommets 25 à 36



Les 36 autocollants numérotés

Lorsqu'on fait une rotation , g par exemple les autocollants bougent, ça signifie qu'à chaque rotation de base {G, D, H, P, g, d, h, p} on peut associer une permutation {p_G, p_D, p_H,

$p_{P,}$ p_g, p_d, p_h, p_p} de S_x et à chaque rotation étendues {Γ, Ω} on associe une permutation étendue p_Γ, p_Ω.
Soient Λ l'ensemble des permutations engendrées par {p_G, p_D, p_H, $p_{P,}$ p_g, p_d, p_h, p_p} et Λ^+ engendré par {p_G, p_D, p_H, $p_{P,}$ p_g, p_d, p_h, p_p, p_Γ, p_Ω}.

$\Lambda = < p_G, p_D, p_H, p_{P,} p_g, p_d, p_h, p_p >$

$\Lambda^+ = < p_G, p_D, p_H, p_{P,} p_g, p_d, p_h, p_p, p_\Gamma, p_\Omega >$

et on a : $|\Lambda| = |G|$ et $|\Lambda^+| = |G^+|$.

Note : $p_{g'} = (p_g)^{-1}$

Et on définit une loi '.' sur Λ : (Λ,.)

$\rho.\sigma = \sigma \circ \rho$

(Λ, .) est un groupe.

on écrit $\rho\sigma = \rho.\sigma$

```
#gap_pyraminx.txt
#permutations de base :
#permutations sommet
pG := (30,28,29);
pD := (33,31,32);
pH := (27,25,26);
pP := (35,34,36);
#per tranche: (arete)(arete)(centre)
pg := (2,4,11)(8,10,5)(21,15,16);
pd := (1,12,4)(7,6,10)(17,14,24);
ph := (1,8,9)(7,2,3)(22,13,20);
pp := (3,5,12)(9,11,6)(23,19,18);
```

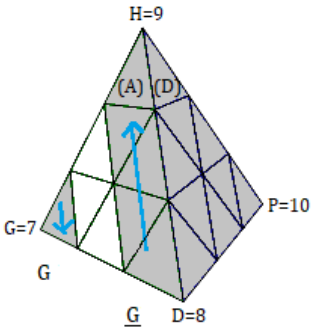
```
#permutations étendues (violer les lois)
pGamma := (1,7);
pOmega := (1,2)(7,8);
LAMBDAPLUS := Group( pG, pD, pH, pP, pg, pd, ph, pp,
pGamma, pOmega );
LAMBDA := Group( pG, pD, pH, pP, pg, pd, ph, pp);
S := Group( pg, pd, ph, pp);

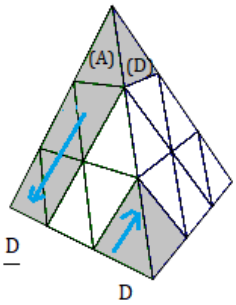
N := 2*2 ;;
Print( "\n" );
Print( "|LAMBDA+| = ",Size( LAMBDAPLUS ), "\n" );
Print( "|LAMBDA| = ", Size( LAMBDA ) , "\n" );
Print( "|S| = ", Size( S ) , "\n" );
Print( "N = ",N , "\n" );
Print( "|G+| = ", Factorial(6) * (2^6) * (3^4) *(3^4), "\n" );
Print( "|G| = |G+|/N = ", (Factorial(6) * (2^6)*(3^4)*(3^4))
/ N, "\n" );
```

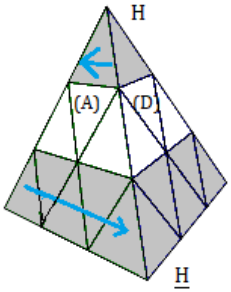
```
Packages:    TomLib 1.1.4  loaded.
gap> gap> gap> (28,29,30)
gap> (31,32,33)
gap> (25,26,27)
gap> (34,36,35)
gap> gap> (2,4,11)(5,8,10)(15,16,21)
gap> (1,12,4)(6,10,7)(14,24,17)
gap> (1,8,9)(2,3,7)(13,20,22)
gap> (3,5,12)(6,9,11)(18,23,19)
gap> gap> (1,7)
gap> (1,2)(7,8)
gap> <permutation group with 10 generators>
gap> <permutation group with 8 generators>
gap> <permutation group with 4 generators>
gap> gap> gap>
gap> |LAMBDA+| = 302330880
gap> |LAMBDA| = 75582720
gap> |S| = 933120
gap> N = 4
gap> |G+| = 302330880
gap> |G| = |G+|/N = 75582720
gap> gap> gap> gap> gap> gap> gap>
C:\GAP4R4\bin>
```

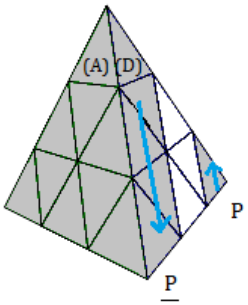
4.16 LE GROUPE GLISSANT (SLICE) DU PYRAMINX

On définit les 4 rotations {G, D, H, P} (G = rotation-opposée à G) comme ceci :









On pose :

Q = < G<u>G</u>', D<u>D</u>' , H<u>H</u>', P<u>P</u>' >

Q engendre un ensemble d'états S défini ainsi :

S = { s = état | s = e•V , V∈Q } ; e=état résolu

Par définition S est le groupe Glissant (Slice group) du Pyraminx .

<u>Le GAP nous donne</u>

|S| = 302330880

Voici un script en GAP qui permet de trouver |S|

```
#gap_pyraminx.txt

#permutations de base

#permutation sommet

pG := (30,28,29);

pD := (33,31,32);

pH := (27,25,26);

pP := (35,34,36);

#per tranche: (arete)(arete)(centre)

pg := (2,4,11)(8,10,5)(21,15,16);
```

```
pd := (1,12,4)(7,6,10)(17,14,24);

ph := (1,8,9)(7,2,3)(22,13,20);

pp := (3,5,12)(9,11,6)(23,19,18);

#per-croisée

pGs :=
(1,3,6)(7,9,12)(13,19,17)(14,20,18)(22,23,24)(25,34,33)(
26,36,31)(27,35,32);

pDs :=
(2,5,9)(3,8,11)(13,16,23)(15,18,22)(19,20,21)(25,29,35)(
26,30,34)(27,28,36);

pHs :=
(4,6,5)(10,12,11)(14,23,21)(15,24,19)(16,17,18)(28,32,34
)(29,33,36)(30,31,35);

pPs :=
(1,2,10)(4,7,8)(13,15,14)(16,24,20)(17,22,21)(25,28,31)(
26,29,32)(27,30,33);

#permutations étendues (violer les lois)

pGamma := (1,7);

pOmega := (1,2)(7,8);


####

LAMBDAPLUS :=  Group( pG, pD, pH, pP, pg, pd, ph, pp,
pGamma, pOmega );
```

```
LAMBDA := Group( pG, pD, pH, pP, pg, pd, ph, pp);

GLISSANT := Group(pG*pGs^-1, pD*pDs^-1, pH*pHs^-1,
pP*pPs^-1);


N := 2*2 ;;

Print( "\n" );

Print( "|LAMBDA+| = ",Size( LAMBDAPLUS ), "\n" );

Print( "|LAMBDA| = ", Size( LAMBDA ) , "\n" );

Print( "|GLISSANT| = ", Size( GLISSANT ) , "\n" );

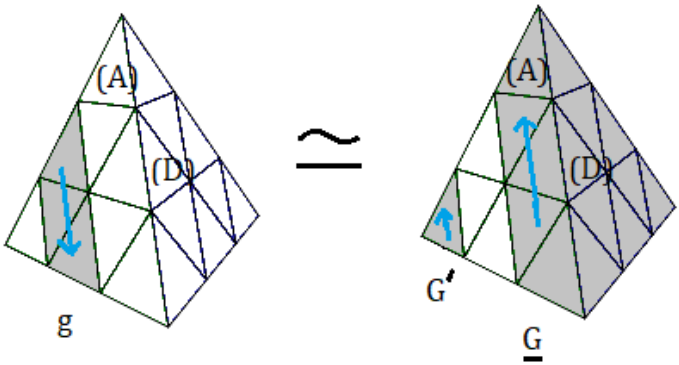

Print( "N = ",N  , "\n" );

Print( "|G+| = ",  Factorial(6) * (2^6) * (3^4) *(3^4), "\n" );

Print( "|G| = |G+|/N = ", (Factorial(6) * (2^6)*(3^4)*(3^4))
/ N, "\n" );
```

```
Packages:    TomLib 1.1.4  loaded.
gap> gap> gap> gap> (28,29,30)
gap> (31,32,33)
gap> (25,26,27)
gap> (34,36,35)
gap> gap> (2,4,11)(5,8,10)(15,16,21)
gap> (1,12,4)(6,10,7)(14,24,17)
gap> (1,8,9)(2,3,7)(13,20,22)
gap> (3,5,12)(6,9,11)(18,23,19)
gap> gap> (1,3,6)(7,9,12)(13,19,17)(14,20,18)(22,23,24)(25,34,33)(26,36,31)(27,35,32)
gap> (2,5,9)(3,8,11)(13,16,23)(15,18,22)(19,20,21)(25,29,35)(26,30,34)(27,28,36)
gap> (4,6,5)(10,12,11)(14,23,21)(15,24,19)(16,17,18)(28,32,34)(29,33,36)(30,31,35)
gap> (1,2,10)(4,7,8)(13,15,14)(16,24,20)(17,22,21)(25,28,31)(26,29,32)(27,30,33)
gap> gap> (1,7)
gap> (1,2)(7,8)
gap> gap> gap> <permutation group with 10 generators>
gap> <permutation group with 8 generators>
gap> <permutation group with 4 generators>
gap> gap> gap>
gap> |LAMBDA+| = 302330880
gap> |LAMBDA| = 75582720
gap> |GLISSANT| = 302330880
gap> gap> N = 4
gap> |G+| = 302330880
gap> |G| = |G+|/N = 75582720
gap> gap>
C:\GAP4R4\bin>
```

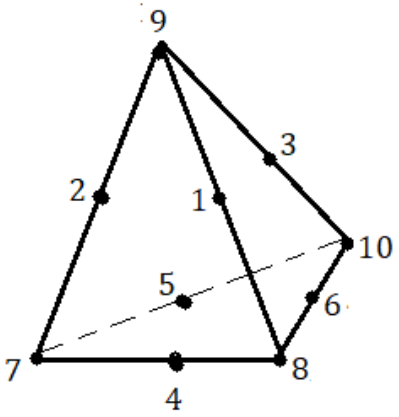
Remarque : On a:



$$g = G' \underline{G}^{t} G$$

4.17 LE GROUPE CROISE DU PYRAMINX

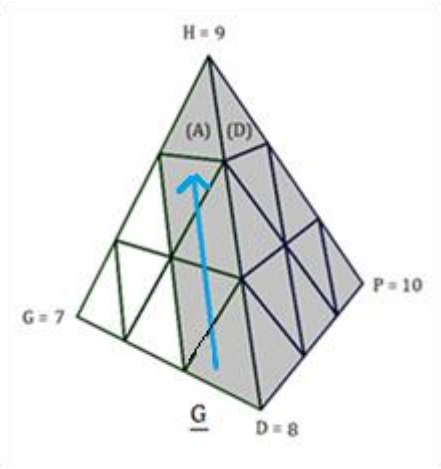
Dans cette partie on ne considère que les pièces, càd on ignore les orientations , les sommets et les arêtes sont alors identifiés par un numéro (on ignore les centres).



Les sommets et les arêtes sont numérotés

Rotations opposées :

{G , D, H, P }



rotation opposée G

On pose:

¤ K = < XY' | X,Y ∈{G, D, H, P } >

K engendre un groupe de permutations des sommets
C_s = C, par définition C est le groupe Croisé du Pyraminx .

¤ K engendre aussi un groupe de permutations des arêtes
C_a , par définition C_a est le groupe Croisé des arêtes du Pyraminx .

Voici un script en GAP qui permet de calculer le groupe Croisé du Pyraminx C et le groupe Croisé des arêtes C_a .

#FormuleCroise = < XY' | X,Y rotations croisée >

#Le groupe Croisé du pyraminx (tétraèdre :S=4,F=4,A=6)

```
#le groupe Croisé des sommets (cross vertice)
vG := (9,8,10);
vD := (9,10,7) ;
vH := (8,7,10) ;
vP := (9,7,8) ;
SX := [vG, vD, vH, vP];;
SYp := [vG^-1, vD^-1, vH^-1, vP^-1];;
SXtxt := ['G', 'D', 'H', 'P'];
SYptxt := ['g', 'd', 'h', 'p'] ;

#le groupe Croisé des arêtes (Cross edge)
uG := (1,6,3) ;
uD := (2,3,5) ;
uH := (4,5,6) ;
uP := (1,2,4) ;

AX := [uG, uD, uH, uP];;
AYp := [uG^-1, uD^-1, uH^-1, uP^-1];;
```

```
# donne une formule-croisée de longueur 2n

RandomCrossFormula := function(n)

 local nombre, permutations, k , formule, m ;

 nombre := List([1..n], i -> RandomList([1..4]));; #[1..4]
==> 4 rotations

#Print("\n listnombre = ", nombre , "\n" );

  permutations := [];

 formule := [];

for k in nombre do

        Append(permutations,[SX[k]]); # pour le calcul

        Append(formule,[SXtxt[k]]); # pour affichage


        m :=  RandomList([1..4]);

        while k=m do

                m :=  RandomList([1..4]);

        od;


         Append(permutations, [SYp[m]]);
```

```
        Append(formule,[SYptxt[m]]);

od;

Product(permutations); # calculer le resultat

# affichage
formule := ReplacedString( formule, "g", "G'" );;
formule := ReplacedString( formule, "d", "D'" );;
formule := ReplacedString( formule, "h", "H'" );;
formule := ReplacedString( formule, "p", "P'" );;

return formule;
end;

#Print("\n ", RandomCrossFormula(5) , "\n" );

generators := Set(Arrangements([1..4],2), t -> SX[t[2]] *
SYp[t[1]]);; #[1..4] ==> 4 rotations
```

```
Print("\n generateur = ", Length(generators) , "\n" );

Cross := Group(generators);;

Print("\n |Cross| = ", Size(Cross) , "\n" );

#IsSimpleGroup( Cross ) ;

Print("\n Cross = ", StructureDescription(Cross) , "\n" );


generators := Set(Arrangements([1..4],2), t -> AX[t[2]] *
AYp[t[1]]);; #[1..4] ==> 4 rotations

Print("\n generateur = ", Length(generators) , "\n" );

Cross := Group(generators);;

Print("\n |Cross| = ", Size(Cross) , "\n" );

#IsSimpleGroup( Cross ) ;

Print("\n Cross-edge = ", StructureDescription(Cross) ,
"\n" );
```

```
gap> gap>
 PD'PH'HG'DG'GD'
gap> gap> gap>
 generateur = 3
gap> gap>
 |Cross| = 4
gap> gap>
 Cross = C2 x C2
gap> gap> gap>
 generateur = 12
gap> gap>
 |Cross| = 60
gap> gap>
 Cross-edge = A5
gap> gap>
C:\GAP4R4\bin>
```

On trouve :

C = $\mathbb{Z}_2$ x $\mathbb{Z}_2$; le groupe de Klein

$C_a = A_5$

Remarque : 1) Le script permet aussi de donner au hasard une formule croisée de longueur 10 du genre : PD' PH' HG' DG' GD' .

2) Ne confondez pas :

$p_V \in \Lambda \Rightarrow p_V$ = permutation des autocollants

$(u,x,v,y) \Rightarrow u \in S_{12}$, u = permutation des pièces-arêtes

$v \in S_8$, v = permutation des pièces-sommets

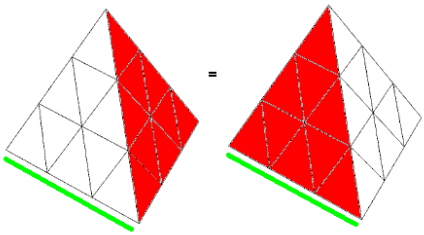
3) Le groupe Croisé C est un sous groupe des permutations des pièces S_n , tandis que le groupe Glissant $\mathcal{S}$ est un sous groupe d'états G .

5 L'INDICATRICE DU PYRAMINX

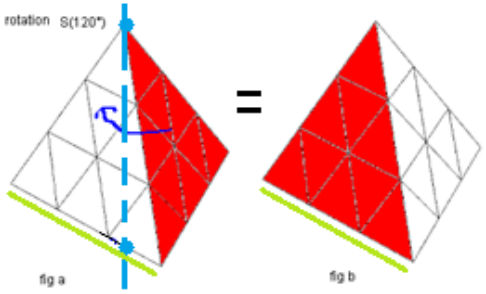
Prenons le Pyraminx et posons nous 2 questions suivantes:
- Combien de Pyraminx différents si on le peint avec seulement 3 couleurs, ou 4 couleurs (une couleur par face et une couleur peut être utilisée plusieurs fois) ?
- Combien de Pyraminx différents si on le peint avec 1 face rouge, 2 faces blanches, et 1 face verte ?

5.1 ANALYSER LE PROBLEME

Voyons comment on dit 2 Pyraminx sont identiques ...



Ces 2 Pyraminx sont identiques



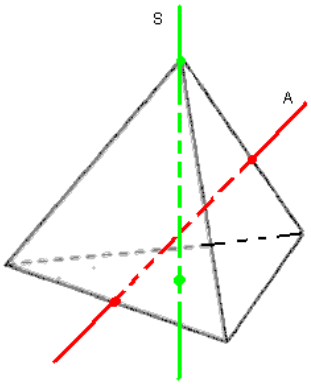
On passe de a à b par la rotation S(120°)

En effet si on le tient dans la main , on ne verra pas la différence, pour nous c'est un Pyraminx à 3 couleurs rouge, vert et blanc. Il n'y a pas d'Avant, ni de Bas, ni Gauche, ni Droite ,... c'est un Pyraminx "mobile" on peut le bouger, tourner, pivoter .... contrairement à un Pyraminx fixe il y a un Avant, un Bas ....

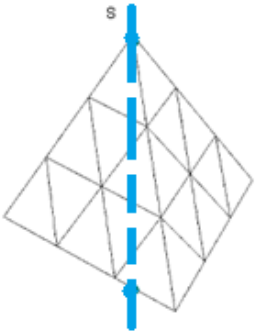
Pour un Pyraminx "mobile", on le tient dans la main comme on veut ça ne change rien, mais on passe d'une position à une autre par des rotations
Exemple on passe de fig(a) à fig(b) par la rotation S(120°)=d'axe sommet-centre à 120°:

La question se pose donc quelles sont les rotations qui laissent invariant le Pyraminx ?

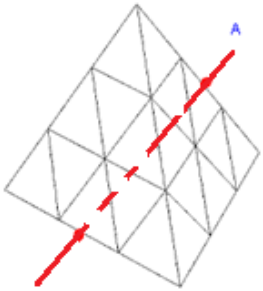
5.2 LE GROUPE DES DEPLACEMENTS DU PYRAMINX D(P)



2 types de rotations



Rotation S: Axe sommet-centre



Rotation A: Axe arête-arête

Il y a deux types de rotations sur le Pyraminx: les rotations d'axe sommet-centre, les rotations d'axe arête-arête (axe passe par les milieux d'arêtes), mais avant tout introduisons-nous une notation: T_k^n , signifie on a: n orbites à k éléments

<u>Rotation S: Axe sommet-centre</u>
- il y a 4 rotations S(120°) ⇒ 1 orbite à 3 éléments, 1 orbite à 1 élément ce qui donne
$4T_3T_1$
- il y a 4 rotations S(-120°) ⇒ 1 orbite à 3 éléments, 1 orbite à 1 élément ce qui donne
$4T_3T_1$

<u>Rotation A: Axe arête-arête</u>
- il y a 3 rotations A(180°) ⇒ 2 orbites à 2 éléments, ce qui donne
$3T_2^2$
Et bien sûr
<u>L'identité id</u>

- il y a un id ⇒ 4 orbites à 1 élément, ce qui donne
T_1^4

Soit au total: 8+3+1 (identité) = 12 rotations, ces rotations forment un groupe D(P) (identique à A_4 = D(P)) ce qu'on appelle le groupe de déplacement (isométrie positive) du Pyraminx. Il laisse invariant le Pyraminx.

La fonction définie par:
$K = (8T_3T_1 + 3T_2^2 + T_1^4)/12$
se nomme l'indicatrice du Pyraminx ou l'indicateur des cycles de D(P). Pourquoi des 'cycles' ??
En fait on peut voir les choses autrement, on peut dire: T_k^n , signifie on a: n cycles de longueur k
voyons pour:

<u>Rotation S: Axe sommet-centre</u>
- il y a 4 rotations S(120°) ⇒ les faces bougent ⇒ (D,A,G)(B) ⇒ un 3-cycle, un 1-cycle ce qui donne
$4T_3T_1$
- il y a 4 rotations S(-120°) ⇒ les faces bougent ⇒ (G,A,D)(B) ⇒ un 3-cycle, un 1-cycle ce qui donne
$4T_3T_1$

<u>Rotation A: Axe arête-arête</u>
- il y a 3 rotations A(180°) ⇒ les faces bougent ⇒ (A,B)(G,D) ⇒ deux 2-cycle, ce qui donne
$3T_2^2$

<u>L'identité id</u>
- il y a un id ⇒ (A)(B)(G)(D) ce qui donne
T_1^4

Remarque importante: Pour (D,A,G)(B) on pourrait dire on a: D=A=G, B on a identifié les faces D=A=G on a donc en fait que 2 faces D et B au lieu de 4, ce genre d'identification arrive très souvent comme par exemple les modulo , on identifie 3=6=9=12=..... c'est comme si vous avez plusieurs feuilles (faces) et elles sont collées (en dessous) ensemble pour former en une seule feuille!

5.3 L'INDICATRICE DU PYRAMINX

On rappelle que ça vaut:

$K = (8T_3T_1 + 3T_2^2 + T_1^4)/12$

T_k^n, signifie on a: n orbites à k éléments
ou encore
T_k^n, signifie on a: n (k-cycles) , n cycles de longueur k

5.4 FONCTION COLORIAGE μ, μ*

A partir de l'indicatrice K, et grâce au lemme de Burnside et le théorème de Polya on a 2 fonctions de coloriage du Pyraminx
La fonction μ définie par:
μ = dans K, on remplace $T_k = c$ où c=le nombre de couleurs (lemme de Burnside)
$\mu = (8c.c + 3c^2 + c^4)/12$

$\mu = (11c^2 + c^4)/12$

Pour simplifier on ne prend que 3 couleurs X_1, X_2, X_3
La fonction μ^* définie par:
μ^* = Dans K , on remplace $T_k = (X_1^k+X_2^k+X_3^k)$ (théorème de Polya)
$\mu^* = 8(X_1^3+X_2^3+X_3^3)(X_1+X_2+X_3)$
$+3(X_1^2+X_2^2+X_3^2)^2$
$+(X_1+X_2+X_3)^4$

Réponse à nos questions

- Combien de Pyraminx différents si on le peint avec seulement 3 couleurs ?
$\mu = (11c^2 + c^4)/12$
pour c=3
$\mu = (11.3^2 + 3^4)/12$
$\mu = 15$!!!!

- Combien de Pyraminx différents si on le peint avec a couleurs X_1, b couleurs X_2, c couleurs X_3?
Il suffit de développer μ^* et trouver le coefficient de $X_1^a\ X_2^b\ X_3^c$, dans notre cas c'est $X_1X_2^2\ X_3$, bien sûr on ne développe pas μ^* à la main, il y a des programmes, des calculatrices qui le font pour nous.

Commentaire

Pour trouver l'indicatrice du Pyraminx on est obligé de passer par le groupe de déplacement du Pyraminx , une fois trouvé l'indicatrice K elle nous fournit 2 fonctions de coloriages μ et μ^* mais seulement μ qu'on peut le calculer

manuellement, quant à μ* il faut des machines pour calculer. Retenons donc simplement μ

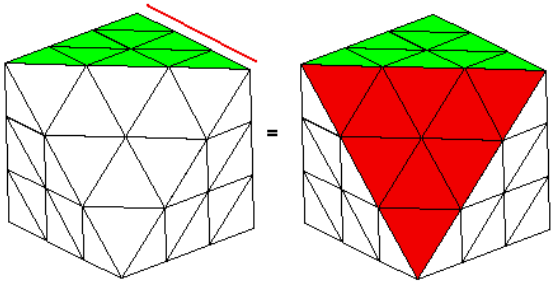
$$\mu = (11c^2 + c^4)/12$$

6 L'INDICATRICE DU FTO

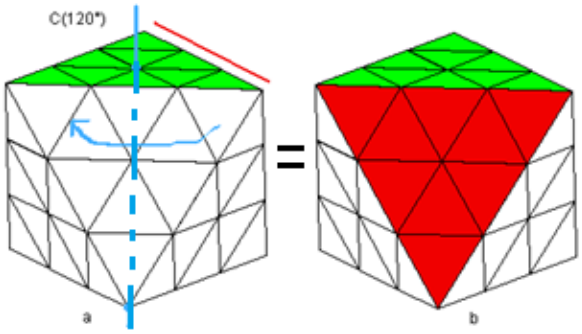
Prenons le FTO et posons nous 2 questions suivantes:
- Combien de FTO différents si on le peint avec seulement 3 couleurs ou 8 couleurs (une couleur par face et une couleur peut être utilisée plusieurs fois) ?
- Combien de FTO différents si on le peint avec 1 face jaune, 2 faces rouges, et 3 faces kleins ?

6.1 ANALYSER LE PROBLEME

Voyons comment on dit 2 FTO sont identiques ...



Ces 2 FTO sont identiques



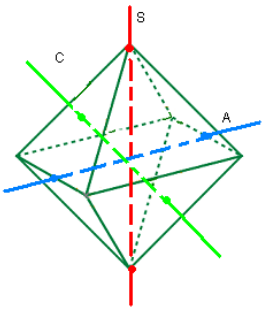
On passe de a à b par la rotation C(120°)

En effet si on le tient dans la main , on ne verra pas la différence, pour nous c'est un FTO à 3 couleurs rouge, vert et blanc. Il n'y a pas de Haut, ni de Bas, ni Gauche, ni Droite ,... c'est un FTO "mobile" on peut le bouger, tourner, pivoter .... contrairement à un FTO fixe il y a un Haut, un Bas ....

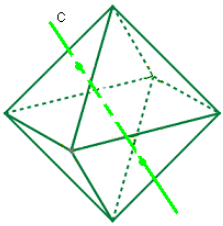
Pour un FTO mobile, on le tient dans la main comme on veut ça ne change rien, mais on passe d'une position à une autre par des rotations
Exemple on passe de fig(a) à fig(b) par la rotation C(120°)=d'axe centre-centre à 120°:

La question se pose donc quelles sont les rotations qui laissent invariant le FTO ?

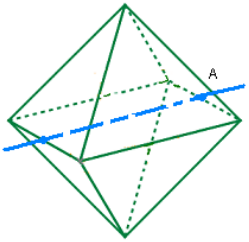
6.2 LE GROUPE DES DEPLACEMENTS DU FTO D(O)



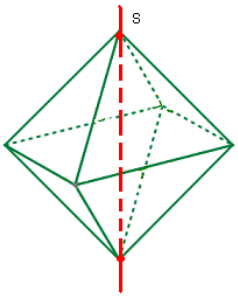
3 types de rotations



Rotation C: Axe centre-centre



Rotation A: Axe arête-arête



Rotation S: Axe sommet-sommet

Il y a trois types de rotations sur le FTO: les rotations d'axe centre-centre, les rotations d'axe arête-arête (axe passe par les milieux d'arêtes), les rotations d'axe sommet-sommet.

<u>Rotation C: Axe centre-centre</u>
- il y a 4 (8 centres/2 = 4) rotations C(120°) ⇒ 2 orbites à 1 élément, 2 orbites à 3 éléments ce qui donne $4T_1^2T_3^2$
- il y a 4 (8 centres/2 = 4) rotations C(-120°) ⇒ 2 orbites à

1 élément, 2 orbites à 3 éléments ce qui donne
$4T_1^2T_3^2$

Rotation A: Axe arête-arête
- il y a 6 (12 arêtes/2 = 6) rotations A(180°) ⇒ 4 orbites à 2 éléments ce qui donne
$6T_2^4$

Rotation S: Axe sommet-sommet
- il y a 3 (6 sommets/2 = 3) rotations S(90°) ⇒ 2 orbites à 4 éléments ce qui donne
$3T_4^2$
- il y a 3 (6 sommets/2 = 3) rotations S(-90°) ⇒ 2 orbites à 4 éléments ce qui donne
$3T_4^2$
- il y a 3 (6 sommets/2 = 3) rotations S(180°) ⇒ 4 orbites à 2 éléments ce qui donne
$3T_2^4$

Et bien sûr
L'identité id
- il y a un id ⇒ 8 orbites à 1 élément, ce qui donne
T_1^8

Soit au total : 8+6+9+1 (identité) = 24 rotations, ces rotations forment un groupe D(O) (identique à S_4=D(O)=D(R)) ce qu'on appelle le groupe de déplacement (isométrie positive) du FTO.
il laisse invariant le FTO.

La fonction définie par:
$K = (8T_1^2T_3^2 + 9T_2^4 + 6T_4^2 + T_1^8)/24$

se nomme l'indicatrice du FTO ou l'indicateur des cycles de D(O). Pourquoi des 'cycles' ??
En fait on peut voir les choses autrement, on peut dire: T_k^n , signifie on a: n cycles de longueur k
voyons par ex pour:
Rotation A: Axe arête-arête
- il y a 6 (12 arêtes/2 = 6) rotations A(180°) ⇒ les faces bougent ⇒ quatre 2-cycles ce qui donne
$6T_2^4$

6.3 L'INDICATRICE DU FTO

On rappelle que ça vaut:

$K = (8T_1^2T_3^2 + 9T_2^4 + 6T_4^2 + T_1^8)/24$
$T_k^n T_k{}^n$, signifie on a: n orbites à k éléments
ou encore
T_k^n , signifie on a: n (k-cycles) , n cycles de longueur k

6.4 FONCTION COLORIAGE μ, μ*

On a 2 fonctions de coloriage du FTO
La fonction μ définie par:
μ = dans K, on remplace $T_k = c$ où c=le nombre de couleurs
$\mu = (8c^2c^2 + 9c^4 + 6c^2 + c^8)/24$
$\mu = (17c^4 + 6c^2 + c^8)/24$

Pour simplifier on ne prend que 3 couleurs X_1, X_2, X_3
La fonction définie par:
μ^* = Dans K , on remplace $T_k = (X_1^k + X_2^k + X_3^k)$

6.5 REPONSE A NOS QUESTIONS

- Combien de FTO différents si on le peint avec seulement 3 couleurs ?
$\mu = (17c^4 + 6c^2 + c^8)/24$
pour c=3
$\mu = (17.3^4 + 6.3^2 + 3^8)/24$
$\mu = 333$!!!!

- Combien de FTO différents si on le peint avec a couleurs X_1, b couleurs X_2, et c couleurs X_3, ?
Il suffit de développer μ^* et trouver le coefficient de $X_1^a X_2^b X_3^c$, bien sûr on ne développe pas μ^* à la main il y a des programmes, des calculatrices qui le font pour nous.

Commentaire

Pour trouver l'indicatrice du FTO on est obligé de passer par le groupe de déplacement, une fois trouvé l'indicatrice K elle nous fournit 2 fonctions de coloriages μ et μ^* mais seulement μ qu'on peut le calculer manuellement, quant à μ^* il faut des machines pour calculer. Retenons donc simplement μ

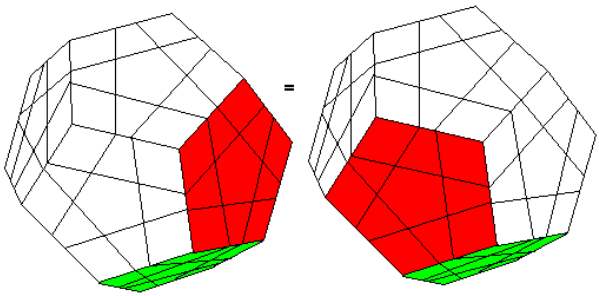
$\mu = (17c^4 + 6c^2 + c^8)/24$

7 L'INDICATRICE DU MEGAMINX

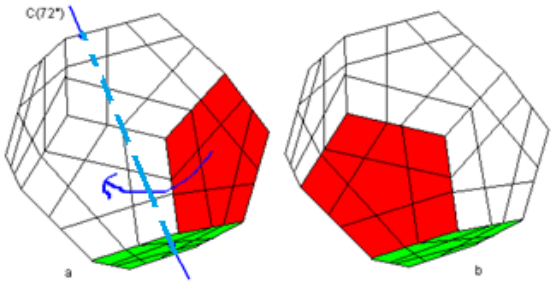
Prenons le Mégaminx et posons nous 2 questions suivantes:
- Combien de Mégaminx différents si on le peint avec seulement 3 couleurs ou 12 couleurs (une couleur par face et une couleur peut être utilisée plusieurs fois) ?
- Combien de Mégaminx différents si on le peint avec 1 face jaune, 2 faces rouges, et 3 faces klein ?

7.1 ANALYSER LE PROBLEME

Voyons comment on dit 2 Mégaminx sont identiques ...



Ces 2 Mégaminx sont identiques



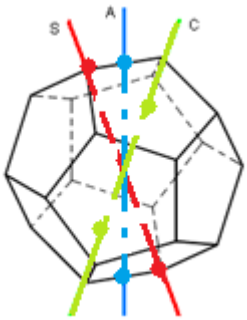
On passe de a à b par la rotation C(72°)

En effet si on le tient dans la main , on ne verra pas la différence, pour nous c'est un Megaminx à 3 couleurs rouge, vert et blanc. Il n'y a pas de Haut, ni de Bas, ni Gauche, ni Droite ,... c'est un Mégaminx "mobile" on peut le bouger, tourner, pivoter .... contrairement à un Mégaminx fixe il y a un Haut, un Bas ....

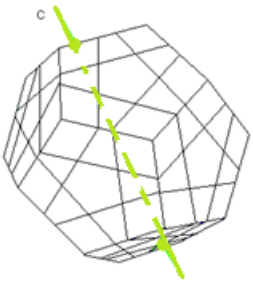
Pour un Mégaminx mobile, on le tient dans la main comme on veut ça ne change rien, mais on passe d'une position à une autre par des rotations
Exemple on passe de fig(a) à fig(b) par la rotation C(72°)=d'axe centre-centre à 72°:

La question se pose donc quelles sont les rotations qui laissent invariant le Mégaminx ?

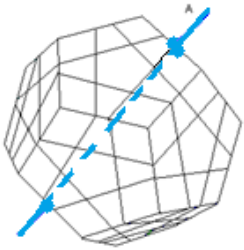
7.2 LE GROUPE DES DEPLACEMENTS DU MEGAMINX D(M)



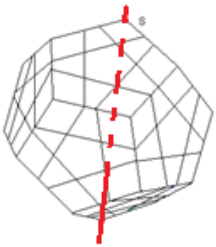
3 types de rotations



Rotation C: Axe centre-centre



Rotation A: Axe arête-arête



Rotation S: Axe sommet-sommet

Il y a trois types de rotations sur le Mégaminx: les rotations d'axe centre-centre, les rotations d'axe arête-arête (axe passe par les milieux d'arêtes), les rotations d'axe sommet-sommet , on introduit une notation: T_k^n , signifie on a: n orbites à k éléments

<u>Rotation C: Axe centre-centre</u>
- il y a 6 (12 faces/2 = 6) rotations C(72°) ⇒ 2 orbites à 1 élément, 2 orbites à 5 éléments
et +6 rotations C(2x72°)+6 rotations C(3x72°)+6 rotations

C(4x72°) ce qui donne
$24T_1^2T_5^2$

Rotation A: Axe arête-arête
- il y a 15 (30 arêtes/2 = 15) rotations A(180°) ⇒ 6 orbites à 2 éléments ce qui donne
$15T_2^6$

Rotation S: Axe sommet-sommet
- il y a 10 (20 sommets/2 = 10) rotations S(120°) ⇒ 4 orbites à 3 éléments, ce qui donne
$10T_3^4$
- il y a 10 (20 sommets/2 = 10) rotations S(-120°) ⇒ 4 orbites à 3 éléments, ce qui donne
$10T_3^4$

Et bien sûr
L'identité id
- il y a un id ⇒ 12 orbites à 1 élément, ce qui donne
T_1^{12}

Soit au total: 24+15+20+1=60 rotations, ces rotations forment un groupe D(M) (identique à A_5 = D(P)) ce qu'on appelle le groupe de déplacement (isométrie positive) du Mégaminx. Il laisse invariant le Mégaminx.

La fonction définie par:
$K = (24T_1^2T_5^2 + 15T_2^6 + 20T_2^4 + T_1^{12})/60$
se nomme l'indicatrice du Mégaminx ou l'indicateur des cycles de D(M). Pourquoi des 'cycles' ??
En fait on peut voir les choses autrement, on peut dire: T_k^n , signifie on a: n cycles de longueur k

voyons par ex pour :

<u>Rotation C: Axe centre-centre</u>
- il y a 6 (12 faces/2=6) rotations C(72°) ⇒ deux 1-cycle, deux 5-cycles,
et +6 rotations C(2x72°)+6 rotations C(3x72°)+6 rotations C(4x72°) ce qui donne
$24T_1^2T_5^2$

... etc ...

7.3 L'INDICATRICE DU MEGAMINX

On rappelle que ça vaut:

$K = (24T_1^2T_5^2 + 15T_2^6 + 20T_2^4 + T_1^{12})/60$

T_k^n , signifie on a: n orbites à k éléments
ou encore
T_k^n , signifie on a: n (k-cycles) , n cycles de longueur k

7.4 FONCTION COLORIAGE μ, μ*

On a 2 fonctions de coloriage du Mégaminx
La fonction μ définie par:
μ = dans K, on remplace $T_k = c$ où c=le nombre de couleurs
$\mu = (24c^2c^2 + 15c^6 + 20c^4 + c^{12})/60$

$\mu = (44c^4 + 15c^6 + c^{12})/60$

Pour simplifier on ne prend que 3 couleurs X_1, X_2, X_3
La fonction définie par:
μ^* = Dans K , on remplace $T_k = (X_1^k + X_2^k + X_3^k)$

7.5 REPONSE A NOS QUESTIONS

- Combien de Mégaminx différents si on le peint avec seulement 3 couleurs ?
$\mu = (44c^4 + 15c^6 + c^{12})/60$
pour c=3
$\mu = (44.3^4 + 15.3^6 + 3^{12})/60$
$\mu = 9099$!!!!

- Combien de Mégaminx différents si on le peint avec a couleurs X_1, b couleurs X_2, et c couleurs X_3, ?
Il suffit de développer μ^* et trouver le coefficient de $X_1^a X_2^b X_3^c$, bien sûr on ne développe pas μ^* à la main il y a des programmes, des calculatrices qui le font pour nous.

Commentaire

Pour trouver l'indicatrice du Mégaminx on est obligé de passer par le groupe de déplacement, une fois trouvé l'indicatrice K elle nous fournit 2 fonctions de coloriages μ et μ^* mais seulement μ qu'on peut le calculer manuellement, quant à μ^* il faut des machines pour

calculer. Retenons donc simplement μ

$\mu = (44c^4 + 15c^6 + c^{12})/60$

8 LE SQUARE-1



8.1 PESENTATION DU SQUARE-1

Le Square-1 est inventé par Dr. Vojtech Kopsky et Dr. Harel Hrsel en 1990.

C'est un twist exceptionnel, je me souviens la première fois de sa rencontre. Après avoir joué le Rubik's Cube, le Skewb, le Revenge, le Pyraminx j'ai commandé un twist dont je n'en avais aucune idée de lui ... Lorsqu'il est arrivé, il est déjà mélangé ! et a une forme très spéciale... Puis quelques manipulations ... et hup là ! il s'est transformé en cube !!! je me suis vraiment émerveillé, je me demandais

comment un truc comme ça peut se transformer en un cube ??

Les twists que je jouais gardaient toujours leur forme après un mélange, celui-ci c'était mon premier twist transformable en cube . Plus tard j'ai appris qu'il a un nom de code le 'Square-1' .

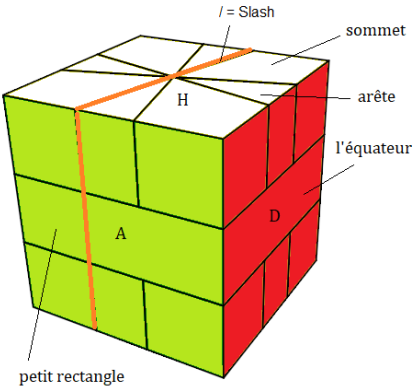
Le Square-1 est assez spéciale, il change de forme après un mélange, des formes très bizarre d'ailleurs !!! En plus, les rotations sont : 30°, 60°, 90° , 180° , ... pas toujours fixe à 90° comme le Rubik's Cube.

C'est un cube ayant 3 étages: le Haut, l'équateur et le Bas. Le Haut et le Bas chacun formés de 8 pièces: 4 arêtes et 4 sommets.
Quant à l'équateur, il est coupé en deux, cela oblige ainsi la face Droite tourner toujours 180° (/ = slash).
Ces 6 faces, chacune ayant une couleur, lorsqu'on mélange ça donne des formes étranges ... et sous la forme cubique les faces perdent leur couleur initiale (en sortant de l'usine). Le but c'est de reconstituer la forme cubique à l'état résolu, et chaque face portant une seule couleur.

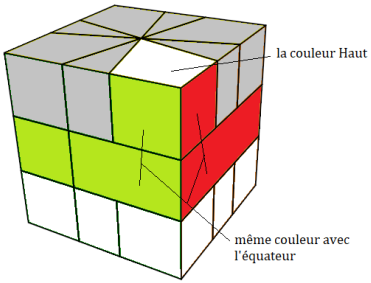
Notation

Pour fixer les idées on tient le Cube comme ça, le petit rectangle se trouve en Avant-Gauche comme indique la fig. La face Avant et le Haut choisies une fois pour tout :

H(aut) = b(lanc), B(as) = j(aune), A(vant) = v(ert), P(ostérieur) = k(lein), G(auche) = o(range), D(roite) = r(ouge) .



La face Avant c'est la face avec l'équateur comportant le petit rectangle à gauche.
La couleur Haut, c'est la couleur-haut du sommet "correspondant" à l'équateur, c'est-à-dire dont les faces latérales ont les même couleurs avec l'équateur voir fig



Couleur Haut

8.2 LES ROTATIONS

On note:

1 ⇒ tourner le Haut 30° (une arête) dans le sens horaire.

-1 ⇒ tourner le Haut -30°.

B ⇒ tourner le Bas 30° dans le sens horaire.

-B ⇒ tourner le Bas -30°

/ ⇒ tourner la moitié-Droite 180°

Pour le Square-1 on adopte la notation additive '+' :

1+1+1+B+B+/ ou

1+1-B-B-B+/

de façon générale on a
n+kB+/ ou en abrégé n+kB/

* n>0 ⇒ tourner le Haut dans le sens horaire n arêtes

* n<0 ⇒ tourner le Haut dans le sens contraire n arêtes

* k>0 ⇒ tourner le Bas dans le sens horaire k arêtes

* k<0 ⇒ tourner le Bas dans le sens contraire k arêtes

* / ⇒ tourner la moitié-Droite 180°

* 1 sommet = 2 arêtes

* 1 arête = 30°

exemple: **3-2B/**
3 = tourner 3 arêtes de la face Haut dans le sens horaire.
-2B = tourner 2 arêtes de la face Bas dans le sens contraire.
/ = tourner la face Droite 180° (/ = slash)

Les parenthèses '(', ')' qui se trouvent dans les formules sont là pour faciliter la lecture c'est tout !!!

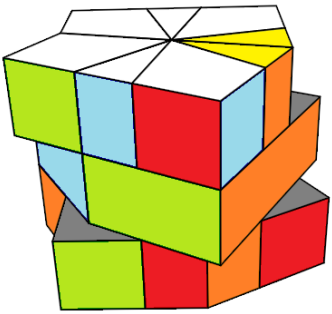
Observation

Comme nous avons déjà dit plus haut, le Square-1 est formé par 18 pièces divisées en 3 catégories:

1. Les arêtes (8) : portant 2 couleurs sans orientation, elles se déplacent librement.
2. Les sommets (8) : portant 3 couleurs sans orientation, ils se déplacent aussi librement.
2. L'équateur en deux pièces.

Pour le Square-1 on ignore l'équateur, comme en Rubik's Cube on ignore les centres.

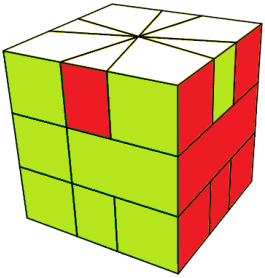
Les arêtes ne se mettent jamais à une place des sommets, et inversement. Chacun reste dans son groupe, les arêtes dans le groupe des arêtes, les sommets dans le groupe des sommets.



Square-1 mélangé

8.3 LES ETATS ETRANGES

Le Square-1 peut produire un phénomène que l'on appelle le "Problème de parité", le twist étant sous la forme cubique, on a une parité c'est quand on a un couple d'arêtes (ou de sommets) à échanger. C'est une parité difficile à comprendre.



problème de parité

On se demande :

- d'où vient cette parité ?

- quelle est la probabilité de tomber sur cet état ?

- et pourquoi c'est un "problème" ?

Il faut avouer que j'ai mis beaucoup de temps pour comprendre ce phénomène.

8.4 LE PROBLEME DE PARITE

Pour parler du "Problème de parité" il faut :

1) Désigner qui sont les rotations de base (rotations standards) .

2) Montrer (à partir des rotations de base) qu'on a une loi de parité :

signature(sommets) = signature(arêtes)

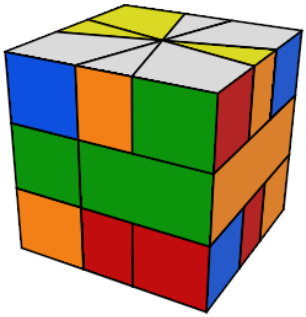
3) Trouver un état qui viole cette loi de parité.

La plus grande difficulté chez Square-1 c'est trouver les rotations de base pour les quelles on a la loi de parité.

Après quelques résolutions du Square-1, on peut tomber sur un phénomène nommé "Problème de parité" c'est à dire il y a 2 arêtes ou 2 sommets à échanger.

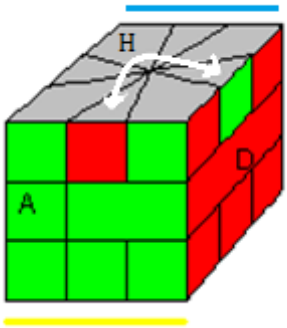
Ce problème est assez mystérieux ... Il n'est pas facile d'expliquer la cause de cette parité ....
Il a fallu la sortie de l'Helicopter (2007), pour comprendre la parité chez le Square-1.

Voyons de plus près, quelqu'un mélange le Cube, et nous le donne sous la forme cubique ci-dessous



Square-1 mélangé

à la fin de la résolution on arrive à cet état:

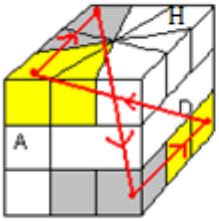


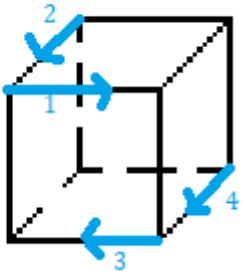
(a)

On a là un problème de parité !! et l'état (a) se nomme l'état de parité.

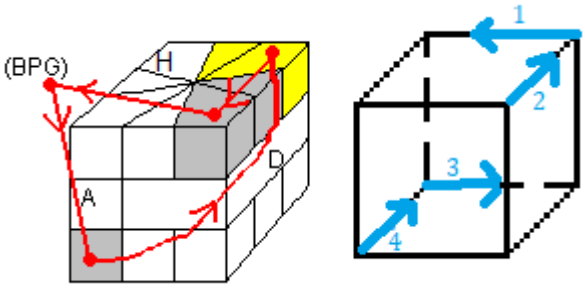
8.5 LES ROTATIONS DE BASE

Considérons maintenant les 4 formules suivantes:

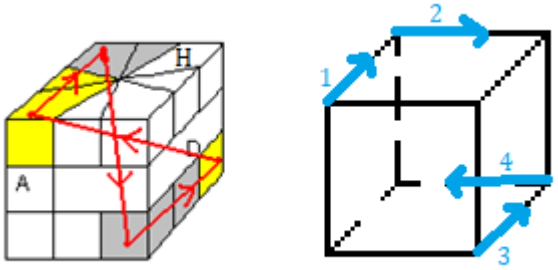




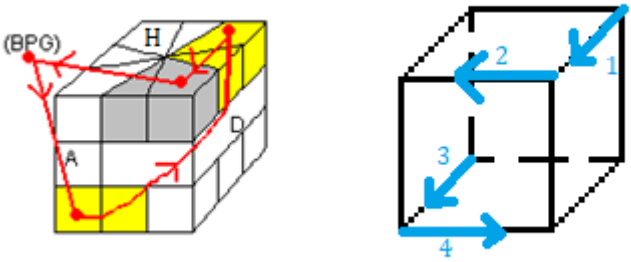
S = 1/3/-1



Q = 1/3B/-1



E = -B/3/B



T = -B/3B/B

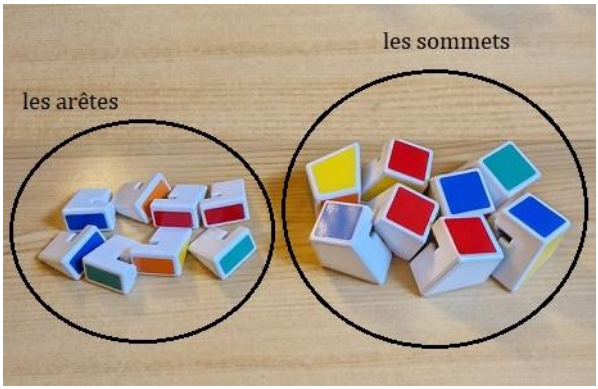
Par définition, les formules {3, 3B, S, Q, E, T} seront nommés les "rotation de base" ou les "rotations standard" du Square-1 , c'est simplement une appellation .

Les rotations {1, B, /} sont des rotations non-standard du Cube, les rotations non-base.

8.6 LE GROUPE DES CONFIGURATIONS (G^+,.)

Il y a 8 arêtes qui peuvent déplacer partout en restant dans leur camp, on a donc l'affaire à S_8, de même pour les sommets .

on pose : $G^+ = S_8 \times S_8$



$G^+ = S_8 \times S_8$

On définit sur G^+ une loi '.' afin que (G^+,.) soit un groupe.
$\mu=(u,v)$, $u \in S_8$, arêtes, $v \in S_8$ sommets.

μ=(u,v) , μ'=(u',v')
μμ' = (u,v)(u',v') = (uu',vv')
munit cette loi (G^+,.) est groupe, le groupe des configurations ou des états étendus du Square-1.

Dans G^+ on peut permuter 2 arêtes sans toucher les sommets et inversement.

Une formule génère une configuration c'est-à-dire une permutation et une orientation mais ici on a seulement la permutation (pas d'orientation).

8.7 LES FORMULES DU SQUARE-1 (M,.)

Soit M l'ensemble des formules engendrés par ces 6 rotations de base.

M = < 3, 3B, S, Q, E, T >

exemple des éléments de M:

-S = 1/-3/-1 (lire à l'envers et "+" ↔ "-")
S+S = 2S = (1/3/-1) + (1/3/-1) = 1/3/+/3/-1 = 1/6/-1
-Q = 1/-3B/-1
2E = -B/6/B
etc...

Et on va noter M^+ l'ensemble des formules étendus,
M^+ = < 3, 3B, S, Q, E, T, Ω >

où Ω = (HA,HD) c'est-à-dire on enlève les arêtes (HA) et (HD) on les permute et puis on les remet.

À chaque rotation de base Z on associé une configuration μ_Z nommé état base

$Z \rightarrow \mu_Z$: $G \rightarrow \mu_G$, $D \rightarrow \mu_D$, $h \rightarrow \mu_h$, ...

Puis on définit la fonction $\mathcal{X}$ de M sur G^+ ainsi

$\mathcal{X} : M \rightarrow G^+$

$\mathcal{X}(G) = \mu_G$, $\mathcal{X}(D) = \mu_{BD}$, $\mathcal{X}(h) = \mu_h$, ...

En suite on proplonge en formule :

V = GDhp

$\mathcal{X}(V) = \mu_G\mu_D\mu_h\mu_p$

et qui vérifie ;

1) $\mathcal{X}(I) = e$

2) $\mathcal{X}(VT) = \mathcal{X}(V)\,\mathcal{X}(T)$

3) $\mathcal{X}(V) = \mathcal{X}(T) \Rightarrow V = T$;($\mathcal{X}$ est injective)

Note : (3) signifie que, par définition, deux foumules qui donnent la même configuration sont considérées comme identiques,

$\mathcal{X}$ est bijective donc M est fini car G^+ est fini

deux formules donnant la même configuration sont identiques.

Considérons l' action suivante '•' de M sur G^+ :

$G^+ \times M \rightarrow G^+$

$(\mu, V) \rightarrow \mu \bullet V = \mu\, \mathcal{X}(V)$

A_1) $\forall \mu$; $\mu \bullet I = \mu$;élément neutre

A_2) $\forall \mu,V,T$; $(\mu \bullet V) \bullet T = \mu \bullet (VT)$;associatif

A_3) $e \bullet V = e \Rightarrow V = I$

Si quelqu'un fixe e c'est forcement I , I est la seule formule qui fixe tout le monde.

A_4) $\forall V,T$; $e \bullet (VT) = (e \bullet V)\,(e \bullet T)$;compatibilité des lois de M et G

Considérons maintenant :
$G \stackrel{def}{\equiv} \{\mu \in G^+ \mid \mu = e \bullet V\ ,\ V \in M\}$, e=état résolu

c'est l'ensemble des états μ produits par M à partir de e (générés par M à partir de e) c'est par définition le groupe (cubique) du Square-1. Comme un état se réduit à une permutation donc les éléments de G sont des permutations.

et G est contenu dans $S_8 \times S_8$
$G \subset G^+ = S_8 \times S_8$
Comme les arêtes et les sommets ne s'entremêlent pas , G est composé de deux trucs indépendants:
$G = G_a \times G_s$; G_a = arêtes et G_s = sommets

Donc une formule génère deux permutations: une pour les arêtes u, et l'autre pour les sommets v, le couple (u,v) est un élément de G , $u \in G_a$, $v \in G_s$ Nous allons montrer que le Square-1 possède une loi de "parité", plus précisément la loi des phases.

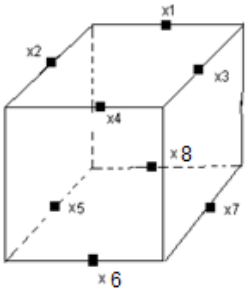
NOTE : G^+ est le groupe étendu de G, $G^+ = S_8 \times S_8$, $G \subset G^+$
Il faut absolument faire la distinction entre M et G , M = formules = mouvements = mélanges et G = états = motif = configuration.

8.8 A_8 X $A_8 \subset G$

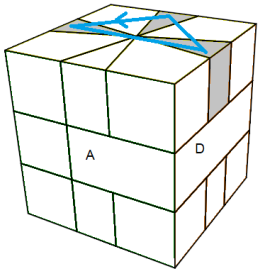
On commence par s'occuper les arêtes, pour les sommets c'est pareil

A1. Trouver un 3-cycle dans G_a (arêtes) .

On va numéroter les arêtes comme indique la fig ci-dessous, et on veut trouver une formule O de M donnant le 3-cycle (x_1, x_2, x_3)



Les arêtes numérotées



O

On pose :
Z = (-B/6/B)-3B+(1/6/-1)+6B+(-B/3/B)+6B
Z = 2E-3B+2S+6B+E+6B.
à partir de Z et 3, on peut fabrique un O tel que
e•O = (u,id) ; u =(x_1 ,x_2 ,x_3)
Plus précisement
O = -3+Z-3+Z+6.
(x_1 ,x_2 ,x_3) = O = -3+(2E-3B+2S+6B+E+6B)-3+(2E-3B+2S+6B+E+6B)+6 .

O génère une permutation u dans G_a avec u = (x_1,x_2,x_3)

A2. Trouver une famille particulière de permutations de G_a

On veut trouver une famille particulière (x_3,x, ...) de permutations de G_a qui laissent fixe x_1,x_2 et x est une arête différente de x_1,x_2,x_3 , ces permutations peuvent bouger les autres pièces.

Ce n'est pas bien compliqué , il suffit de prendre les kT combiné avec 3B on aura tout ce qui faut !!!
Par exemple T = -B/3B/B qui donne comme permutation sur les arêtes t=(x_3,x_4, ...) et laisse x_1,x_2 fixes
et de même 2T ⇒ une permutation t^2=(x_3,x_5 ,...) et x_1,x_2 fixes ainsi on peut donc (avec 3B) remplacer l'arête x par x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 .

A3. Trouver une famille (x_1,x_2,x) de G_a

On veut trouver une famille de permutations de G_a du type (x_1,x_2,x) où x_1,x_2 sont donnés et x est une arête différente de x_1,x_2 . Ici on va utiliser une propriété très connue des

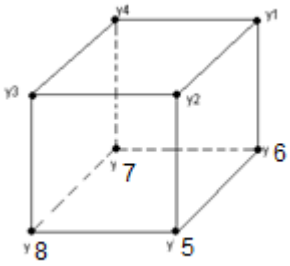
permutations

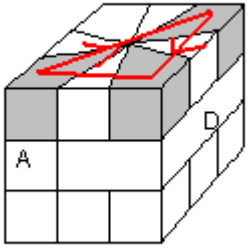
<u>Propriété</u> : Soient p une permutation et (a,b,c) un 3-cycle alors on a:
$p^{-1}(a,b,c)p = (p(a), p(b), p(c))$ (rappel : uv=vou)
Nous allons donc appliquer cette propriété dans notre cas.
$t^{-1}ut = t^{-1}(x_1,x_2,x_3)t = (t(x_1),t(x_2),t(x_3))= (x_1,x_2,x_4)$
$t^{-2}(x_1,x_2,x_3)t^2 = (t^2(x_1),t^2(x_2),t^2(x_3))= (x_1,x_2,x_5)$....
Ainsi les (x_1,x_2, x) où x_1,x_2 donnés, fixés, sont des 3-cycles dans G_a car ils proviennent de M.
Or on sait que cette famille engendre A_8 donc $A_8 \subset G_a$ (une permutation de A_8 provient de kT, m3B, O)

On fait la même chose avec les sommets.

B1. <u>Trouver un 3-cycle dans G_s (sommets) .</u>

On numérote les sommets comme indique la fig ci-dessous, et on veut trouver une formule C donnant le 3-cycle (y_1, y_2, y_3)





Les sommets numérotés C

On pose:
X = (1/3/-1)-3B+(1/3/-1)-3+(1/-3+3B/-1)
X = S-3B+S-3-S+Q
à partir de X et 3 on peut fabriquer une formule C de G telle que
e • C=(id,v) ; v=(y_1,y_2,y_3)
Plus précisement
(y_1,y_2,y_3) = C = 6+X-6 = 6+S-3B+S-3-S+Q-6

C génère une permutation v = (y_1,y_2,y_3) dans G_s .

B2. Trouver une famille particulière de permutations de G_s

On veut trouver une famille particulière (y_3,y, ...) de permutations de G_s qui laissent fixe y_1,y_2 et y est un sommet différent de y_1,y_2,y_3 , ces permutations peuvent bouger les autres pièces

On prend les kS combiné avec 3B on aura tout ce qui faut !!!
Par exemple S=1/3/-1 qui donne comme permutation sur les sommets s=(y_3,y_4, ...) et laisse y_1,y_2 fixes
et de même 2S ⇒ s^2=(y_3,y_5, ...) et y_1,y_2 fixes ainsi (avec 3B) on peut remplacer le sommet y par y_4, y_5, y_6, y_7, y_8 .

B3. Trouver une famille (y_1,y_2,y) de G_s

On veut trouver une famille de permutations de G_s du type (y_1,y_2,y) où y_1,y_2 sont donnés et y est un sommet différent de y_1,y_2
$s^{-1}vs = s^{-1}(y_1,y_2,y_3)s = (y_1,y_2,y_4)$
$s^{-2}(y_1,y_2,y_3)s^2 = (y_1,y_2,y_5)$
....

Ainsi les (y_1,y_2, y) où y_1,y_2 donnés, fixés, sont des 3-cycles dans G_s car ils proviennent de M.
Or on sait que cette famille engendre A_8 donc $A_8 \subset G_s$ (une permutation de A_8 provient de kS, m3B, C)

En résumé:
$A_8 \subset G_a$
$A_8 \subset G_s$
$A_8 \times A_8 \subset G_a \times G_s = G$

<u>$G \subset Ker(f)$</u>

Soit f défini par:
$f : S_8 \times S_8 \rightarrow \{1,-1\}$
$(u,v) \rightarrow f(u,v) = sig(u).sig(v)$
$Ker(f) = \{ (u,v) / sig(u).sig(v) = 1 \}$

Les formules: {3, 3B, S, Q, E, T} génèrent, pour des arêtes, des permutations impaires, de même pour des sommets , donc sig(u).sig(v) = (-1).(-1) = 1 donc elles sont toutes dans le Ker(f), par conséquence G aussi
$G \subset Ker(f)$
finalement
$A_8 \times A_8 \subset G \subset Ker(f)$

Rappel sur les indices:
$K \subset H \subset G$
$[G:K] = [G:H][H:K]$
$[GxG':HxH'] = [G:H][G':H']$

$A_8 \times A_8 \subset G \subset Ker(f) \subset S_8 \times S_8$
$[S_8 \times S_8:A_8 \times A_8]=[S_8 \times S_8:Ker(f)][Ker(f):A_8 \times A_8]$
$[S_8:A_8] \times [S_8:A_8]=[S_8 \times S_8:Ker(f)][Ker(f):A_8 \times A_8]$

$2 \times 2 = 2 \times [Ker(f):A_8 \times A_8]$
$2 = [Ker(f):A_8 \times A_8]$

Mais entre $A_8 \times A_8$ et Ker(f) il n'y a rien parce que l'indice de $[Ker(f):A_8 \times A_8]$ vaut 2
donc on a:
- soit: $G = A_8 \times A_8$
- soit: $G = Ker(f)$

Comme S engendre 2 permutations u (pour les arêtes), v (pour les sommets) impaires,
$(u,v) \notin A_8 \times A_8 \Rightarrow G \neq A_8 \times A_8$ donc $G = Ker(f)$
Ca signifie $sig(u).sig(v)=1$ c'est à dire u pair $\Rightarrow$ v pair , u impair $\Rightarrow$ v impair
La loi des phases (les sommets et les arêtes sont en phases $sig(u) = sig(v)$) est ainsi démontrée...

Finalement on trouve : $G = \{\mu=(u,v) \in G^+ \mid sig(u)=sig(v)\}$
$\mathcal{N} = 2^1.2^1/2$

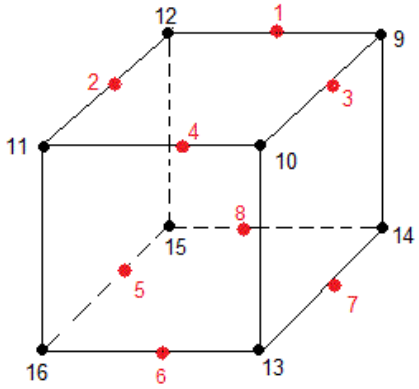
Remarque: on a: $(S_8 \times S_8) / Ker(f) = Im(f)$ donc
$|S_8 \times S_8| / |Ker(f)| = |Im(f)|$
$|Ker(f)| = |S_8 \times S_8| / |Im(f)|$
$|G| = 8! \times 8! / 2$
$|G| = 812851200$

<u>Le GAP</u>

Télécharger le GAP ici

https://www.gap-system.org/Releases/index.html

Dans la fenêtre de cmd on se place dans le dossier de GAP
C:\Users\nom> cd\gap4r4\bin
C:\gap4r4\bin>gap < gap_sqr.txt



Les autocollants numérotés

gap_sqr.txt:

```
#gap_sqr.txt
#12  1  9
#2   H  3
#11  4  10
#---------
#13  6  16
#5   B  7
#14  8  15

p3 := (1,3,4,2)(9,10,11,12) ;
p3B := (5,8,7,6)(13,14,15,16) ;
pS := (2,8,7,4)(12,15,16,11) ;
pQ := (1,3,6,5)(9,10,13,14) ;
pE := (2,1,7,6)(11,12,15,16) ;
pT := (3,4,5,8)(9,10,13,14) ;
pOmega := (4,3);
```

```
LAMBDAPLUS :=  Group(p3, p3B, pS, pQ, pE, pT, pOmega);
# SLAMBDAPLUS := Size( LAMBDAPLUS );
LAMBDA :=  Group(p3, p3B, pS, pQ, pE, pT);
# SLAMBDA := Size( LAMBDA );
Print( "\n" );
Print( "|LAMBDA+| = ",Size( LAMBDAPLUS ), "\n" );
Print( "|LAMBDA| = ", Size( LAMBDA ) , "\n" );
Print( "N = ",  2 , "\n" );
Print( "|G+| = ", Factorial(8) * Factorial(8) , "\n" );
Print( "|G| = |G+|/N = ", (Factorial(8) * Factorial(8)) / 2 ,
"\n" );
```

Le GAP nous donne bien :
$|\Lambda^+| = |G^+| = 1625702400$
$|\Lambda| = |G| = 812851200$
Indice $= |G^+|/|G| = 2$

```
gap> (1,3,4,2)(9,10,11,12)
gap> (5,8,7,6)(13,14,15,16)
gap> (2,8,7,4)(11,12,15,16)
gap> (1,3,6,5)(9,10,13,14)
gap> (1,7,6,2)(11,12,15,16)
gap> (3,4,5,8)(9,10,13,14)
gap> (3,4)
gap> <permutation group with 7 generators>
gap> gap> <permutation group with 6 generators>
gap> gap>
gap> |LAMBDA+| = 1625702400
gap> |LAMBDA| = 812851200
gap> N = 2
gap> |G+| = 1625702400
gap> |G| = |G+|/N = 812851200
gap> gap>
C:\GAP4R4\bin>
```

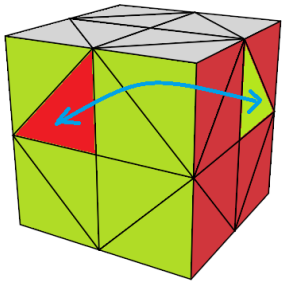
Rappel : G est le groupe cubique du Square-1.
Remarque : on a aussi :

$G^+ = \{\mu = e \bullet V \, , V \in M^+\}$

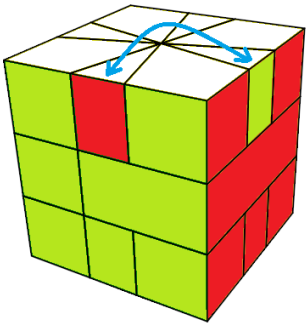
c'est l'ensemble des configurations μ produits par M^+ à partir de e (générés par M^+ à partir de e) , on dit aussi c'est l'ensemble des états étendus.
Comme un état étendu (une configuration) se réduit à une permutation donc les éléments de G^+ sont des permutations.

Problème de parité

Pour comprendre la parité du Square-1, observons la parité de l'Helicopter Cube.



Parité d'Helicopter



Parité du Square-1

Le problème de parité d'Helicopter s'explique assez bien: On a un ensemble de rotations standard (de base) : {A,D,G,P, ...} à 180° et un ensemble de rotations non-standard, rotations-jumbling, rotations cachées ...{a,d,g,p, ... } à 60° . Lorsqu'on mélange l'Helicopter avec les rotations non-standard , il peut arriver d'avoir une "parité", donc la cause du problème de parité chez l'Helicopter provient de l'utilisation des rotations non-standard.

Eh bien chez le Square-1 c'est pareil, le problème c'est qu'il faut trouver les rotations standard et non-standard.

Pour le square-1 on a:
Rotations standard: {3, 3B, S, Q, E, T}
Rotations non-standard: {1, B, /}

Observons bien les rotations de base, elles vérifier la loi de parité.

Le twist étant cubique :

¤ Helicopter : Les sommets et les feuilles sont en phase : sig(sommets)=sig(feuilles)

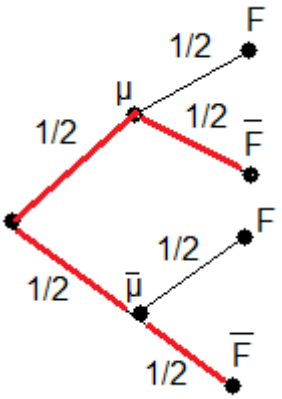
¤ Square-1 : Les sommets et les arêtes sont en phase : sig(sommets)=sig(arêtes)

Lorsqu'on mélange le Cube avec les rotations non-standard il peut arriver que l'on viole la loi de parité donc ⇒ le "Problème de parité"

Donc parler de la parité il faut fixer, préciser ceux qui sont les rotations de base (rotations standard), et montrer (à partir de ces rotations de base) qu'on a une loi de parité et trouver un état qui viole cette loi.

Probabilité d'avoir une parité

On pourrait se demander quelle est la probabilité de tomber dans le problème de parité ?
-Avant de passer à la forme cubique on est dans un état μ soit pair, soit impair
-On passe à la forme cubique par une formule F : soit pair, soit impair .
d'où l'arbre de probabilité

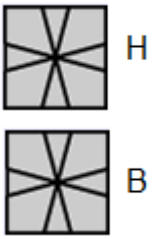


l'Arbre de probabilité

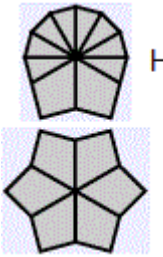
d'où
$p(\overline{F}) = p(\mu)p(\overline{F}/\mu) + p(\overline{\mu})p(\overline{F}/\overline{\mu})$
$= 1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/2 = 2/4 = 1/2$
On a 50% de chance d'avoir la parité !

Fixer la parité

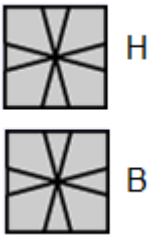
Un état de parité ν c'est un élément qui n'est pas dans G, $\nu \notin G$, pour fixer la parité, on est donc obligé d'utiliser quelque part les rotations non-standard {1, B, /}
A. Première méthode
On casse la forme Cubique, on rend l'état pair puis on revient à la forme Cubique.



I. forme Cubique ⇒



II. forme Roue ⇒



III. forme Cubique

Pour voir il suffit de passer à la forme Roue (f_0) à partir de l'état résolu e (pair), puis on fait 2B (rotation de l'étoile = permutation impaire des sommets) puis on revient à la forme Cubique, là le twist sera en état impair, et on aura donc un problème de parité, autrement dit il suffit que le twist soit en état impair avant de passer à la forme

Cubique (avec une formule paire), on aura alors un problème de parité.

Finalement le problème de parité de Square-1 provient au moment où l'on remonte toutes les arêtes vers le Haut (la forme Roue) pour passer à la forme Cubique. En fin compte c'est assez logique que la parité se produit pendant cette phase. En effet , les arrêtes et les sommets sont remontés de façon arbitraire , ils ne suivent peut-être plus la loi des phases... et comme vous le savez dès qu'il y a de l'arbitraire on risque d'avoir la parité ...

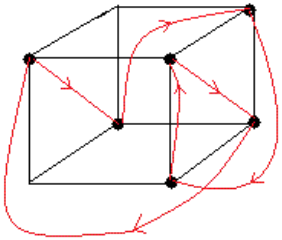
Pour bien comprendre les choses, prenez votre Square-1 à l'état résolu, puis appliquez cette formule :
/-3-3B/2+B/-2-4B/ ; formule paire

Vous tombez sur la forme Roue, observez bien la disposition des pièces, si vous faites 2B, les sommets et les arêtes ne sont plus en phases (sommets = permutation impaire, arêtes = immobiles = permutation paire) donc si vous revenez à la forme Cubique maintenant vous aurez un problème de parité!
autrement dit

Cube → Roue : /-3-3B/2+B/-2-4B/ ; pair

Permutation impaire des sommets : 2B (6-cycle)

Roue → Cube : /2+4B/-2-B/3+3B/ ; pair

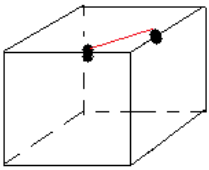


6-cycle sommets ⇒ impair

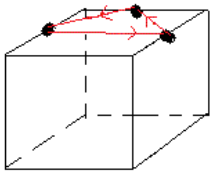
B. Deuxième méthode
Pour fixer la parité, on va transformer l'état impair du Cube en état pair par les formules ci-dessous
tenir le cube: (HA)↔(HD) :

W = (/ 3+3B/ 1+2B/ 2+2B/ 2/ 2+2B/ 1+2B/ -3-3B/) + (1/ 3+3B/ -1-B/ 3+3B/-2B)

ou bien
F = 1/2+2B/-2B/3+3B/1/4+4B/-2B/2+2B/-B/3+3B/



l'état impair



l'état pair

L' Algorithme VIP:

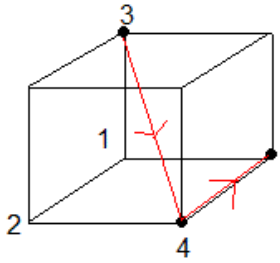
Lorsque le Cube est en état cubique-pair, alors on peut résoudre le Cube par M = < 3, 3B, S, Q, E, T >. Voici l'algorithme s'exprimant avec ces 4 formules S, X, Y, Z (très précieuses) :

S = 1/3/-1 ==> Descendre un sommet

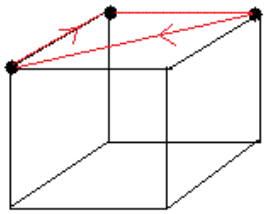
X = 1/3/-3B/3/-3/-3+3B/-1 = (1/3/-1)-3B+(1/3/-1) -3+(1/-3+3B/-1) = S-3B+S-3-S+Q ==> 3-cycle-sommet

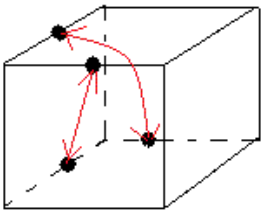
Y = -B/6/4B+1/6/-1+5B/-3/7B = (-B/6/B)+3B+(1/6/-1) +6B+(-B/-3/B)+6B = 2E+3B+2S+6B-E+6B ==> Descendre 2 arêtes

Z = -B/6/-2B+1/6/-1+5B/3/7B = (-B/6/B)-3B+(1/6/-1) +6B+(-B/3/B)+6B = 2E-3B+2S+6B+E+6B ==> Permuter 2 arêtes-Haut (2 arêtes-Bas).

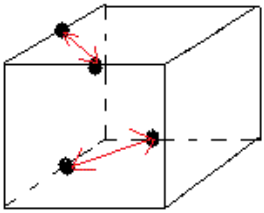


S


X



Y



Z

L'algorithme :

-Ranger les sommets Bas: S, 3, 3B : on place les sommets 1,2 puis 4 à la place du 3, puis on place le 3 qui pousse le 4 à sa place.

- Ranger les sommets Haut: : X, 3 (Si les sommets sont en état impair on fait un 3)

- Ranger les arêtes Bas: Y, 3, 3B (on descend les arêtes adjacentes)

- Ranger les arêtes Haut: Z, 3

Résumons nous:

1. Lorsqu'on mélange le Cube avec les rotations {1,B,/} on arrive à l'un des 4 états ci-dessous :
a. non-cubique, impair
b. non-cubique, pair
c. cubique, impair ⇒ problème de parité (par définition)
d. cubique, pair ⇒ normal, légitime

2. Le groupe G du Square-1 c'est l'ensemble des états μ=(u,v) provenant des rotations de base M.

G provient de M = < 3, 3B, S, Q, E, T >

3. Lorsqu'on mélange le Cube avec les rotations {1,B,/} il arrive 1/2 fois que l'état du Cube soit impair, puis on passe à la forme Cubique avec une formule paire là on a un problème de parité.

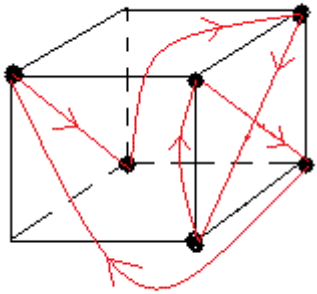
4. Pour fixer la "parité" on a plusieurs méthodes

Première méthode

Le principe est simple: de la forme Cubique on passe à une autre forme par une formule paire, puis on fait une permutation impaire des sommets, et on revient à la forme Cubique avec une formule paire, le twist est maintenant en état pair.

Exemple:

Cube → Roue (/-3-3B/2+B/-2-4B/) ; formule paire
2B ; sommets impair
Roue → Cube (/2+4B/-2-B/3+3B/) ; formule paire
Résoudre de nouveau le Cube. (sommets et arêtes sont maintenant en phase)



6-cycle sommets

Deuxième méthode

On rend le Cube en état pair grâce à la formule (tenir le cube: (HA)↔(HD)) :

W = (/ 3+3B/ 1+2B/ 2+2B/ 2/ 2+2B/ 1+2B/ -3-3B/) + (1/ 3+3B/ -1-B/ 3+3B/ -2B)

ou bien
F = 1/ 2+2B/ -2B/ 3+3B/ 1/ 4+4B/ -2B/ 2+2B/ -B/ 3+3B/

5. Finalement la cause de la "parité" chez le Square-1 est la même chez Helicopter, seule la dificulté c'est de trouver les rotations de base chez le Square-1.

Si le mélange utilise les rotations {1,B,/} alors ça peut donner un état impair à la forme Cubique, qui viole ainsi la loi des phases on aura donc un problème de parité !!!

En conclusion: La difficulté c'est de trouver des rotations qui fournissent la loi de parité, c'est-à-dire trouver les rotations { 3, 3B, S, Q, E, T }.

Conclusion Cette étude théorique du Square-1 permet d'avoir un algorithme de résolution du Square-1 (on est sûr de s'en sortir à 100%)

Algorithme :

On passe de la forme non-Cubique à la forme Cubique par les 5 formules :

f_0 = /2+4B/-2-B/3+3B/
f_1 = /-2/3-4B/-2/
f_2 = /-2B/2
f_3 = /-2B/-4
f_4 = /2/

On résout le Cube.

→Si le Cube a un état impair, on utilise la formule W ou F pour le transformer en état pair .

→Et on résout de nouveau le Cube

Rappel :

$G \stackrel{def}{=} \{\mu \in G^+ \mid \mu = e \bullet V \text{ , où } V \in M\}$

L'ensemble des états (cubiques) du Square-1. C'est l'ensemble des configurations provenant de M

$G^+ = \{\mu=(u,v) \in S_8 x S_8\}$

L'ensemble des configurations , ou des états étendus du Square-1.

Théorème fondamental de la Cubologie

$G = \{\mu=(u,v)\in G^{+} , sig(u)=sig(v)\}$

Condition nécessaire

On se donne une formule $V\in M$, avec $e\bullet V=\mu=(u,v)$ il faut montrer qu'on ait : $sig(u)=sig(v)$.

¤ A) Il suffit de voir si les rotations de base {3, 3B, S, Q, E, T} vérifient cette égalité.

Pour une rotation de base $Z\in\{3, 3B, S, Q, E, T\}$, avec $e\bullet Z=(p,q)$, on a: un 4-cycle-arêtes p, et un 4-cycle-sommets q, donc $sig(p) = sig (q)$.

¤ B) Raisonnons par récurrence

On va raisonner par récurrence sur la longueur de la formule $|V| = n$,

Cette propriété est vraie pour une rotation de base $|Z|=1$, càd pour n=1 ; d'après (A)

Supposons qu'elle soit vraie pour une formule ψ de longueur n, $|\psi|=n$, montrons qu'elle reste encore vraie pour une formule V de longueur $[V|=n+1$

On a
$V = Z\psi$, $|\psi|=n$
$e\bullet V = e\bullet(Z\psi) = (e\bullet Z)(e\bullet\psi)$; d'après (8.4.1)
$(u,v) = (p,q)\ (u',v') = (pu',qv')$.

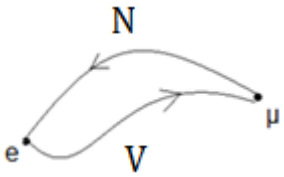
sig(u) = sig(pu')
= sig(p) sig(u')
= sig(q) sig(u') ; d' après (A)
= sig(q) sig(v') ; HR
= sig(qv') = sig(v)
Condition suffissante

On se donne un μ=(u,v) avec sig(u)=sig(v) , il faut trouver une formule V∈M telle que

e•V=μ

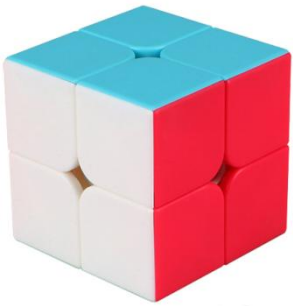
grâce au algorithme VIP ci-dessus on trouve V.
En effet, comme sig(u)=sig(v) on peut résoudre le twist avec l'algorithme VIP qui utilise uniquement des rotations de base, autrement dit on revient à l'état résolu e avec une grosse formule N de M.
μ•N=e

Il suffit de prendre V = -N
e•V=μ
ça signifie que μ provient de M.



9 LE POCKET

9.1 DESCRIPTION



L'inventeur du Pocket est Erno Rubik en 1981, au début le twist ne tournait pas bien, il a fallu beaucoup de temps pour trouver un core adapté, maintenant le Pocket a un core stable et il fonctionne parfaitement bien.

Le Pocket est un Rubik's Cube sans arêtes et sans centres ! c'est un cube de 6 faces, composé de 8 sommets (pas d'arêtes, pas de centres). Lorsqu'on tourne une face les sommets tournent, ainsi on mélange le Cube. Le but c'est de reconstituer le Cube à l'état d'origine, chaque face portant une seule couleur.

Observation

Comme nous avons déjà dit plus haut, le Pocket est formé par 8 sommets chaqu'un portant 3 couleurs, ils se déplacent et se pivotent librement.

9.2 ORIENTATION LE CUBE

Comme toujours dans l'étude mathématique d'un twist on commence par fixer le Cube, càd orienter le Cube.

On oriente le Cube par:
(H)aut=(b)lanc, (B)as=(j)aune, (A)vant=(v)ert,
(P)ostérieur=(k)lein, (G)auche=(o)range, (D)roite=(r)ouge

Ce qui donne l'ordre des faces :

H > B > A > P > G > D

et les couleurs dominantes :

b > j > v > k > o > r

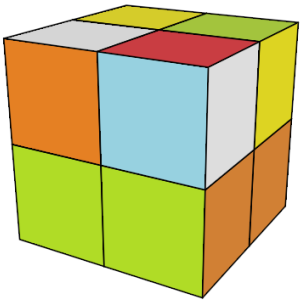
Ainsi cela nous permet d'utiliser les symboles H, B, A, ...

9.3 LES ROTATIONS

On a 6 rotations de base correspondent à 6 faces
{H,B,A,P,G,D}

A = tourner 90° la face Avant dans le sens horaire.
A' = tourner 90° dans le sens contraire
A^2 = tourner 180°

Dans les dessins, la face Avant porte la couleur verte, et on voit le Haut (blanc) et la Droite (rouge) .
Le point '.' ou les parenthèses '(', ')' qui se trouvent dans les formules sont là pour faciliter la lecture c'est tout!!!

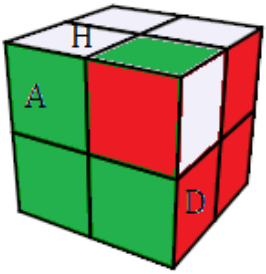


Le Pocket mélangé

On ajoute une rotation "étendue" :

Rotation étendues ψ : Pivoter un sommet

1. On enlève le sommet (brv)
2. Le pivote 120° dans le sens horaire
3. Puis on le remet



état étendu

9.4 MARQUAGE

Ici on fait la même chose comme le Rubik's Cube, il y a des emplacements à 3 facettes marquées comme indiqué sur la fig.1 , et les sommets (numérotés comme indiqué la fig.2) ayant 3 couleurs dont l'une est dominante.

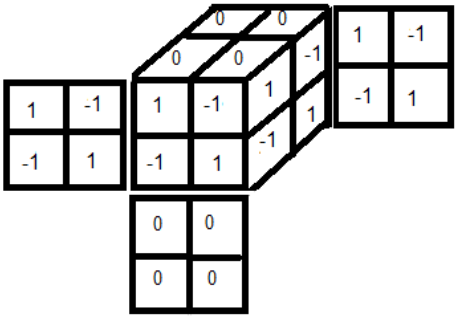


fig.1: Les emplacements avec les facettes marquées
0 = bien orienté

Numérotation des sommets :
On numérote les sommets ainsi

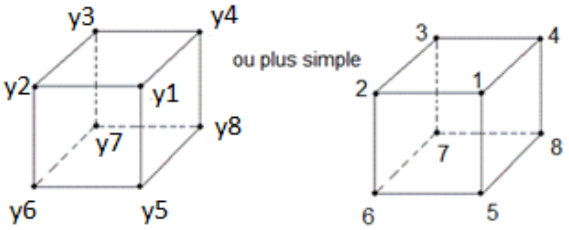


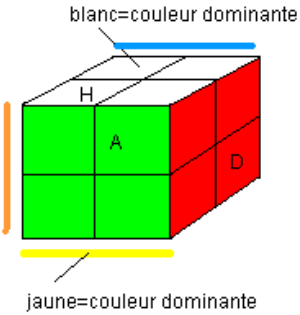
fig2: Les sommets numérotés

Les nom des emplacements suivent la règle suivante:
facette dominante + sens horaire :

(HDA), (HAG), (HGP), (HPD)
(BAD), (BGA), (BPG), (BDP)

Les nom des sommets suivent la règle suivante:
couleur dominante + sens horaire :

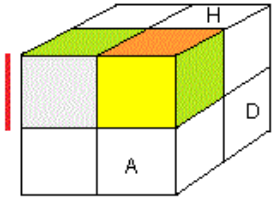
y_1=(brv), y_2=(bvo), y_3=(bok), y_4=(bkr)
y_5=(jvr), y_6=(jov), y_7=(jko), y_8=(jrk),



blanc, jaune = couleurs dominantes

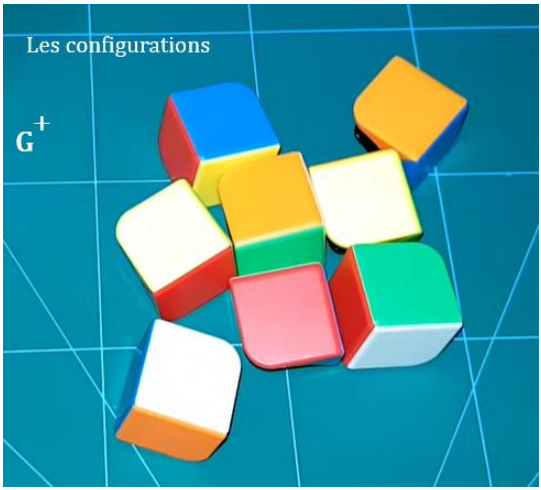
Orientation :

Les sommets y_i se baladent pour se placer dans les emplacements, à chaque fois que la couleur dominante se trouve sur une facette marquée 1 son orientation vaut 1 (1 twist) , sur -1 son orientation vaut -1 (-1 twist) , sur 0 son orientation vaut zéro (0 twist, 0=bien orienté). Par exemple, le sommet y_6=(jov) se place en (HDA) avec jaune = A alors y_6 vaut -1 (-1 twist) car la couleur dominante jaune est sur la facette -1, de même pour le sommet (brv)=y_1 dans (HAG) avec blanc = A alors y_1=1 (1 twist) car la couleur dominante blanc se trouve sur 1 .



blanc, jaune = couleurs dominantes

9.5 L'ENSEMBLE DES CONFIGURATIONS G^+



On imagine que le Pocket est démonté, les sommets bougent librement comme on a 8 sommets on a affaire à S_8
En se déplaçant les sommets pivotent aussi, càd ils changent l'orientation, on a donc affaire à $\mathbb{Z}_3^8$

On pose :
$G^+ = S_8 \times \mathbb{Z}_3^8$

G^+ c'est l'ensemble des configurations (des autocollants) - sans contraints, sans core càd on permute, et pivote librement comme si le twist n'a pas de core - .

La loi '.' dans G^+

$\mu = (v,y)$, $\mu' = (v',y') \in G^+$

(9.5.1) $\mu\mu' = (v,y)(v',y') = (vv', y+v(y'))$

$vv' = v'ov$

$v(y') = (y'_{v(1)}, y'_{v(2)}, ..., y'_{v(8)})$

On peut voire que (G,.) est un groupe.

Rappel : $(S_8, .)$: $vv' = v.v' = v'ov$

9.6 LE GROUPE DES FORMULES (M, .)

Soit M=<H,B,A,P,G,D> , munie la loi '.' concaténation forme un groupe: Le groupe des formules (M, .) . Ici on a M infini, mais on va le rendre fini plus tard.

9.7 LES ETATS DE BASE

à chaque rotation de base Z on associé une configuration μ_Z nommé état base

$Z \rightarrow \mu_Z$: $H \rightarrow \mu_H$, $B \rightarrow \mu_B$, $A \rightarrow \mu_A$, ...

Puis on définit la fonction $\mathcal{X}$ de M sur G^+ ainsi

$\mathcal{X} : M \rightarrow G^+$

$\mathcal{X}(H) = \mu_H$, $\mathcal{X}(B) = \mu_B$, $\mathcal{X}(P) = \mu_P$, ...

Puis proplonge en formule :

V = GDHP

$\mathcal{X}(V) = \mu_G\mu_D\mu_H\mu_P$

et qui vérifie ;

1) $\mathcal{X}(I) = e$

2) $\mathcal{X}(VT) = \mathcal{X}(V)\,\mathcal{X}(T)$

3) $\mathcal{X}(V) = \mathcal{X}(T) \Rightarrow V = T$;($\mathcal{X}$ est injective)

Note : (3) signifie que, par définition, deux foumules qui donnent la même configuration sont considérées comme identiques,

$\mathcal{X}$ est bijective donc M est fini car G^+ est fini

deux formules donnant la même configuration sont identiques.

9.8 ACTION DE M SUR G^+

Maintenant on va définir une action libre et compatible '•' de M sur G^+ .

$G^+ \times M \to G^+$

$(\mu, V) \to \mu \bullet V = \nu \in G^+$

A_1) $\forall \mu$; $\mu \bullet I = \mu$;élément neutre

A_2) $\forall \mu, V, T$; $(\mu \bullet V) \bullet T = \mu \bullet (VT)$;associatif

A_3) $e \bullet V = e \Rightarrow V = I$

Si quelqu'un fixe e c'est forcement I , I est la seule formule qui fixe tout le monde.

(9.8.1) A_4) $\forall V, T$; $e \bullet (VT) = (e \bullet V)\ (e \bullet T)$;compatibilité des lois de M et G

9.9 LA GROUPE DU POCKET G

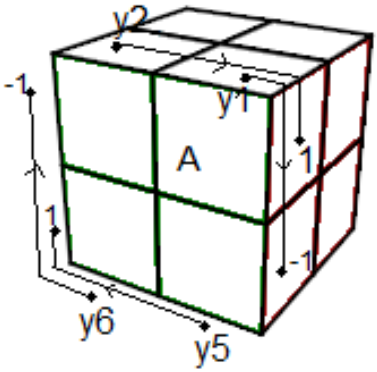
On pose :

$G = \{\mu \in G^+ \mid \mu = e \bullet V\ ,\ V \in M\}$, e=état résolu

Par définition (G,.) est le groupe du Pocket, c'est un sous groupe de (G^+, .)

C'est l'ensemble des configurations provenant de M (à partir de e). Les élément de G s'appellent "état"

La table d'orientation



On note e•A = (q,b) pour dire que la rotation A génère l'état (q,b), où q est la permutation des sommets et b le vecteur d'orientation d'après la numérotation et le marquage on a:

q = 1->5->6->2 = (1,5,6,2) et

b = (-1,1,0,0,1,-1,0,0)

on trouve ainsi pour toutes les états générés par les rotations de base.

(9.9.1) La table d'orientation

rotation	q=permutation	b=orientation
H	(1,2,3,4)	(0,0,0,0,0,0,0,0)
B	(5,6,7,8)	(0,0,0,0,0,0,0,0)
A	(1,5,6,2)	(-1,1,0,0,1,-1,0,0)
P	(4,3,7,8)	(0,0,-1,1,0,0,1,-1)
G	(3,2,6,7)	(0,-1,1,0,0,1,-1,0)
D	(1,4,8,5)	(1,0,0,-1,-1,0,0,1)
Γ	id	(1,0,0,0,0,0,0,0)

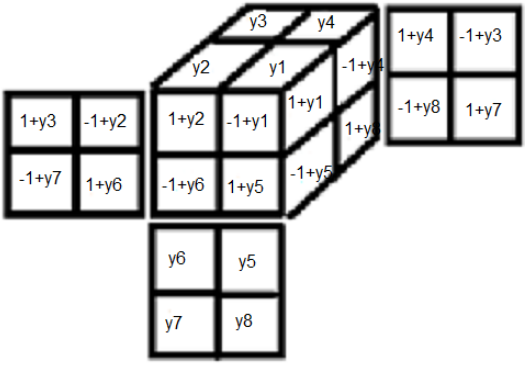
Comment ça se passe ??

(v,y)(v',y') = (w,z) ??

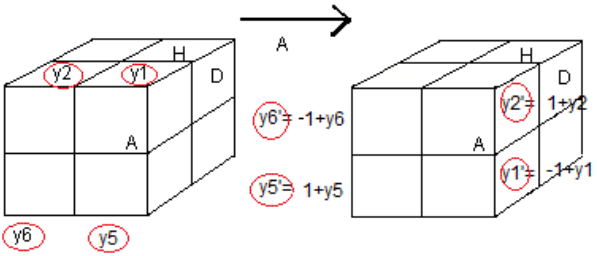
on peut voir facilement que w = vv' , car si on déplace les sommets par v puis par v' alors on déplace bien les sommets par vv'.

Pour trouver ce que vaut z on fait :

Sur la table des marquages on place les y_i sur les facettes marquées zéro 0, comme indique la fig ci-dessous



Quand on fait une rotation de base, par ex A on trouve



$y'_1 = -1+y_5$
$y'_2 = 1+y_1$
$y'_3 = y_3$
$y'_4 = y_4$
$y'_5 = 1+y_6$
$y'_6 = -1+y_2$
$y'_7 = y_7$
$y'_8 = y_8$

or

q = (1,5,6,2)

b = (-1,1,0,0,1,-1,0,0)
càd:
y' = b + q(y)

Une formule V≠I (l'état associé e•V = (v',y')) commence toujours par une rotation de base par ex A (l'état associé e•A = (q,b)) et un reste T (l'état associé e•T = (v,y)) , on a donc

V = AT

e•V = e•(AT) = (e•A)(e•T) ; axiome A_4

d'où

(v',y') = (q,b)(v,y) = (qv, b+q(y))

Ce qui suggère la loi '.' dans G^+ est :

(v,y)(v',y') = (vv',y+v(y')) .

9.10 THEOREME FONDAMENTAL

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une configuration soit un état ?

Soit μ=(v,y) ∈G^+

On pose (T) la loi suivante :

$$(T)\ \sum_{i=1}^{8} y_i = 0 \pmod 3 \ \text{ abrégé } \ y = 0 \pmod 3$$

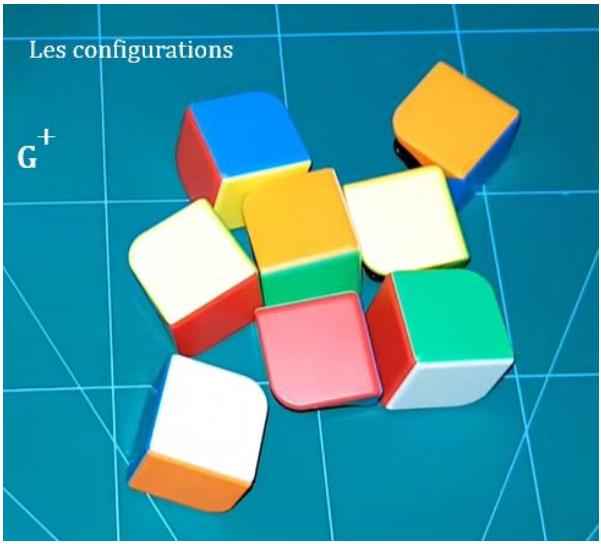
Théorème fondamental :

G = {μ=(v,y)∈G⁺ | μ vérifiant (T)}

μ vérifie (T) ⇔ μ∈G

Démonstration :

On se place dans G⁺



¤ CS (⇒) On se donne une configuration μ=(v,y) vérifiant (T), il faut alors montrer que μ∈G

On va faire ça en plusieurs étapes.

On coupe (v,y) en deux morceaux

$(v, y) = (id, y)(v, 0)$

Ce coupage suggère une construction suivant:

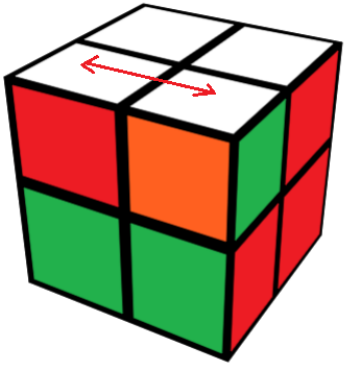
1) $(v, 0)$: On doit trouver une formule qui permute les sommets comme exige v, en gardant les orientations.

2) (id, y) : On doit trouver une formule qui oriente les sommets comme exige y sans déplacer les sommets.

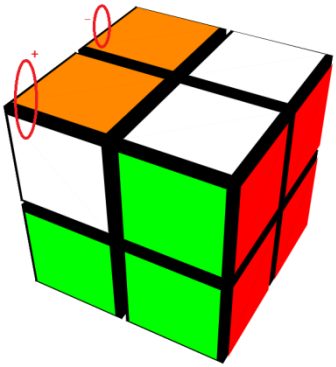
On prend 2 formules suivantes :

$Q = G'HD'H^2GH'G'H^2GDH' = (HDA)\leftrightarrow(HAG)$

$O = [DH]^2G'[HD]^2G = (HAG)^+ (HGP)^-$



Q = G'HD'H2GH'G'H2GDH'



$O = [DH]^2G'[HD]^2G = (HAG)^+ (HGP)^-$

Construire (v, 0)

Q est un 2-cycle-sommet, on peut donc utiliser Q (avec les conjugaisons) pour placer les sommets comme on veut, donc comme exige v sans toucher les orientations, on a donc une formule V_1 telle que :

$e \bullet V_1 = (v,0) \in G$

Construire (id,y)

On utilise O (avec les conjugaisons) pour orienter les sommets comme exige y, c'est possible car la loi des twists (T) dit qu'on oriente toujours 2 sommets dans le sens opposé ou 3 sommets dans le même sens, on a donc une formule V_2 telle que :

$e \bullet V_2 = (id,y) \in G$

Finalement

$(v, y) = (id, y)(v, 0) \in G$, G est un groupe

¤ CN ($\Leftarrow$) Inversement , on part d'une formule $V \in M$, telle que

$e \bullet V = \mu \in G$

Il faut montrer que μ vérifie (T).

on va raisonner par récurrence sur la longueur de $|V| = n$

A) Pour $n=1 \Longrightarrow V=Z$=rotation de base

or d'après la table d'orientation (*9.9.1), les rotations de base Z, avec $e \bullet Z = (q,b)$ vérifient la loi (T).

(T) : $b = 0 \pmod 3$,

donc la propriété est vérifiée pour n=1

B) Supposons que la propriété soit vraie pour n , montrons qu'elle reste encore vraie pour n+1.

Soit W une formule de longueur n+1 et $e \bullet W = (v',y')$ l'état associé. Or on passe de n à n+1 par une rotation de base Z, d'où

$W = \Delta Z$ où

$e \bullet Z = (q,b)$, $e \bullet \Delta = (v,y)$, $|\Delta| = n$

e•W = e•(ΔZ) = (e•Δ)(e•Z) ;d'après (*9.8.1)

(v',y') = (v,y) (q,b) = (vq, y+v(b))

y' = y + v(b)

b = 0 (mod 3) ;tab d'orientation (*9.9.1)

v(b) = 0 (mod 3) ; la permutation v ne change rien sur le modulo

y = 0 (mod 3) ;HR

y' = 0 (mod 3)

donc la loi (T) est vraie pour tout μ = e•V

Le théorème est ainsi démontré.

La loi (T) permet de trouver le nombre $\mathcal{N}$ de contraintes (= le nombre de choix)

(T): y=0 (mod 3) ⇒ 3 choix, $\mathcal{N}$=3

et

$|G| = |G^+|/\mathcal{N} = |G^+|/3 = 8! .3^7$

9.11 LE GROUPE DES PERMUTATIONS (Λ, .)

On veut vérifier si on a défini correctement G et G^+, plus précisément on veut vérifier |G| et $|G^+|$. Pour cela on passe par les permutations (des autocollants) .

L'ensemble des autocollants X :

Soit X l'ensemble des 24 autocollants (stickers) du Pocket. On peut numéroter ces autocollants dans l'ordre 1,2,3,4, ... mais nous allons les numéroter autrement plus astucieux. Une fois ainsi numérotés on peut regrouper facilement ces autocollants pour former les sommets y_i .

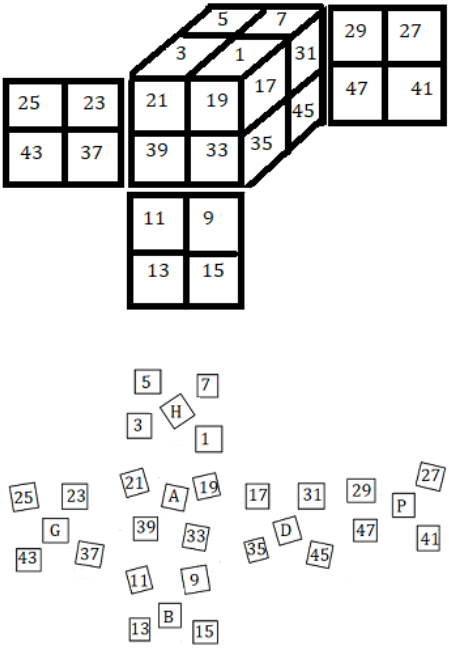
* On utilise les nombres impairs comme le Rubik's Cube pour les sommets.

On commence par les faces dominantes: 1,3,4,7, ...

puis les autres faces dans le sens horaire : (1,17,19), (3,21,23), (5,25,27) , ...

$y_i = (2i-1,4i+13,4i+15)$

Et voici la numérotation des autocollants



L'ensemble des autocollants numérotés

Soit $\psi = (HDA)^+$ la rotation étendue
A chaque rotation de base {H,B,A,P,G,D} on associe une permutation $\{p_H, p_B, p_A, p_P, p_G, p_D\}$ de S_x et p_ψ la permutation étendue associée à la rotation ψ.
Soient Λ l'ensemble des permutations engendrées par $\{p_H, p_B, p_A, p_P, p_G, p_D\}$ et Λ^+ engendrées par $\{p_H, p_B, p_A, p_P, p_G, p_D, p_\psi\}$

$\Lambda = < p_H, p_B, p_A, p_P, p_G, p_D >$

$\Lambda^+ = < p_H, p_B, p_A, p_P, p_G, p_D, p_\psi >$
On a le groupe $(\Lambda, .)$: $\rho\sigma = \rho.\sigma = \sigma \circ \rho$

Permutations standards

p_H = (1,3,5,7)(17,21,25,29)(19,23,27,31) ;
p_B = (9,15,13,11)(33,45,41,37)(35,47,43,39);
p_A = (1,35,11,23)(17,9,37,3)(19,33,39,21);
p_P = (7,25,13,45)(29,27,41,47)(31,5,43 ,15);
p_G = (3,39,13,27)(21,11,41,5)(23,37,43,25);
p_D = (1,29,15,33)(17,31,45,35)(19,7,47,9);
Permutations étendues
p_ψ = (1,17,19)

et le GAP nous donne gap_pocket.txt
$|\Lambda^+| = 264539520 = |G^+|$
$|\Lambda| = 88179840 = |G|$

```
#gap_pocket.txt
#       5    7
#         H
#       3    1
#25   23|21   19|17   31|29   27
#  G   |  A   |  D   |  P
#43   37|39   33|35   45|47   41
#       11   9
#         B
#       13   15
# Pocket=le groupe Pocket (= Rubik sans arêtes)
pH :=  (1,3,5,7)(17,21,25,29)(19,23,27,31) ;
pB :=  (9,15,13,11)(33,45,41,37)(35,47,43,39);
pA :=  (1,35,11,23)(17,9,37,3)(19,33,39,21);
pP :=  (7,25,13,45)(29,27,41,47)(31,5,43 ,15);
pG :=  (3,39,13,27)(21,11,41,5)(23,37,43,25);
```

```
pD :=  (1,29,15,33)(17,31,45,35)(19,7,47,9);
pPsi := (1,17,19);

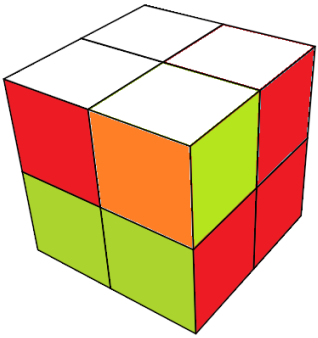
LAMBDAPLUS :=  Group( pH, pB, pA, pP, pG, pD, pPsi );
LAMBDA := Group( pH, pB, pA, pP, pG, pD );
Print( "\n" );
Print( "|LAMBDA+| = ",Size( LAMBDAPLUS ), "\n" );
Print( "|LAMBDA| = ", Size( LAMBDA ) , "\n" );
Print( "N = ",  3 , "\n" );
Print( "|G+| = ", Factorial(8) * (3^8) , "\n" );
Print( "|G| = |G+|/N = ",( Factorial(8) * (3^8) ) / 3 , "\n" );
```

```
gap>
gap> |LAMBDA+| = 264539520
gap> |LAMBDA| = 88179840
gap> N = 3
gap> |G+| = 264539520
gap> |G| = |G+|/N = 88179840
gap> gap>
C:\GAP4R4\bin>
```

Résumer: Toute formule produit un élément de G (état), tout élément de G (état) provient de M (formule)

Remarque :
1. Bien qu'il y ait une bijection entre M et G mais ils jouent des rôles différents, en effet M agit sur G et non le contraire ! .
2. Pour le Pocket il n'y a pas de loi de parité du genre sig(v)=1 , donc à la fin de la résolution si on tombe sur une permutation de 2 sommets, on ne peut pas dire qu'on a un

problème de parité, car cet état est un état légitime du twist on n'a violé aucune loi!!



9.12 LE DIAMETRE DU POCKET

En 1992 Dan HOEY a fait a programme informatique pour calculer le diamètre du Pocket (le diamètre du graphe des états) . Et le résultat montre que le diamètre du Pocket vaut 14.

Distance	états
0	1
1	12
2	114

3	924
4	6539
5	39528
6	199926
7	806136
8	2761740
9	8656152
10	22334112
11	32420448
12	18780864
13	2166720
14	6624
Total (états)	88179840

Il y a 8656152 états à distance 9.

Le diamètre du Pocket est 14 , Voici quelques états de longueur 14 avec les formules associées :

1. G A^2 G' B' G H^2 P' B' D B' D^2 (14)
2. D P D^2 H^2 P D' P H' D^2 H G' (14)
3. P^2 D A' B D^2 P' D B P' G P^2 (14)
4. G^2 H P^2 G' H' G P' G P' H^2 P (14)

9.13 LES ORDRES DU POCKET

Avec un programme informatique on peut trouver les ordres du Pocket, et pour chaque ordre donné d, le nombre d'états ayant le même ordre d.

Il y a 17 ordres différentes dans G. Les ordres sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 21, 30, 36, 45.

L'ordre maximal est 45. Il est atteint en : (BDP,HGP,HPD^{+})(HDA,BPD^{-} ,HAG,BAD,BGA) on écrit simplement (3-cycle^{+})(5-cycle^{-}) .

(BDP,HGP,HPD^{+}) → il faut 3 fois pour revenir à l'état initial

(HDA,BPD^{-} ,HAG,BAD,BGA) → → il faut 15 fois pour revenir à l'état initial

donc il faut ppcm(3,15) = 45 pour revenir à l'état initial

et la formule correspondante trouvé par David SINGMASTER: $P^2D'AB'A$.

$(P^2D'AB'A)^{45} = I$

Voici la table [l'ordre, le nombre d'états] trié de rare vers abondant :

[

[1, 1],

[2, 21819],

[5, 108864],

[3, 355994],

[10, 979776],

[4, 1440180],

[9, 2340576],

[45, 3919104],

[7, 4199040],

[15, 4790016],

[36, 4898880],

[30, 7838208],

[21, 8398080],

[6, 8859102],

[8, 11022480],

[12, 12950280],

[18, 16057440]] ;;

L'ordre 2 est rare et l'ordre 18 est abondant.

9.14 L'ENTROPIE DU POCKET

Comme en Rubik's Cube on peut définir l'entropie d'un état du Pocket. En effet grâce à la table des [ordre, nbr d'états] .

En effet pour définir une entropie il faut connaître 3 choses :

1) Avoir un ensemble d'états

2) À chaque état μ on peut associer un nombre q

3) Connaître le nombre d'états Ω ayant la même valeur q

Alors l'entropie S de μ est par définition :

$S = \log_{10} \Omega$

Soit E ($|E|=\Omega$) l'ensemble des états ayant le même q , on dit que E est un macro-état, pour que le macro-état E apparaisse il suffit que l'un des éléments de E apparaît.

Pour nous le q sera l'ordre de μ ou c'est la même chose l'ordre V , $V^d = I$

$\mu = e \bullet V$

$\mu^d = e$, ou c'est la même chose $V^d = I$

par ex

¤ $V = H\ D\ H'\ G \Rightarrow d=7 \Rightarrow \Omega = 4199040$

$S = \log_{10} \Omega$

$S = \log_{10} (4199040) \simeq 6.6232$

¤ V = H D A^2 ⇒ d=9 ⇒ Ω = 2340576

S = $\log_{10}$ Ω

S = $\log_{10}$ (2340576) ≃ 6.3693

¤ V = H D H A' ⇒ d=18 ⇒ Ω = 16057440

S = $\log_{10}$ Ω

S = $\log_{10}$ (16057440) ≃ 7.2057

¤ V = H H' ⇒ d=1 ⇒ Ω = 1

S = $\log_{10}$ Ω

S = $\log_{10}$ (1) = 0

Voici un Javascript qui permet de calculer l'entropie d'une formule V (ou l'état μ=e•V)

https://fan2cube.fr/pocket_entropie_ordre.html

9.15 LES 𝔇-CLASSE

Si vous cherchez le nombre d'états du Pocket sur internet vous verrez peut-être le nombre 3674160 au lieu de 88179840.

Alors où est la vérité ?

Avant il faut "orienter" le Cube càd déclarer officiellement qui est le Haut, qui est la Droite ....
traditionnellement on oriente le Cube ainsi:
(H)aut=(b)lanc, (B)as=(j)aune, (A)vant=(v)ert,
(P)ostérieur=(k)lein, (G)auche=(o)range,
(D)roite=(r)ouge.

Observons ces trois images ci-dessous
Parmi ces trois images lequel est l'état résolu ? et pourquoi ?

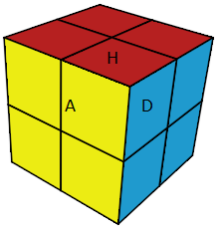


image (a)

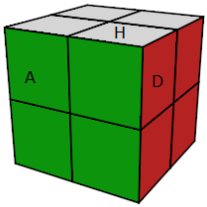


image (b)

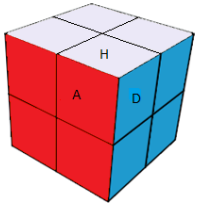


image (c)

L'image (b) est l'état résolu car il garde l'orientation du Cube, tandis que (a) et (c) ont changé l'orientation du Cube, il ne présentent pas l'état résolu.

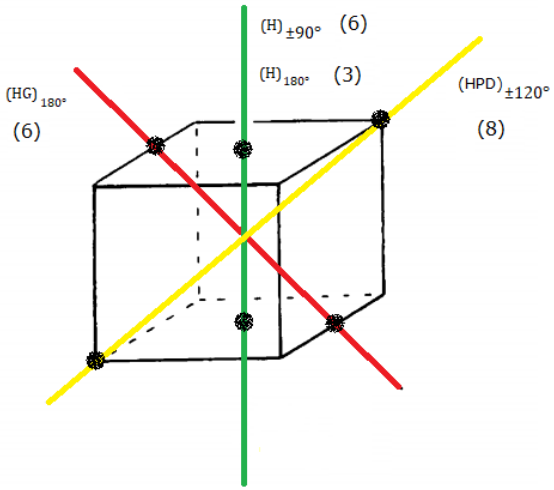
Or pour un jury de compétition ces 3 états jouent le même rôle : l'état résolu du Cube !

En 1993 Jerry BRYAN avait l'idée de classer (mettre dans une même boîte) les états du Pocket suivant un certain nombre de critères .... afin que les états (a), (b), (c) soient dans la même classe, dans la même boîte.
Le critère est nommée la "$\mathfrak{D}$-symétrie" où $\mathfrak{D}$ est le groupe des déplacement du cube (les isométries positives=les rotations du cube) , en effet on passe de l'état (b) à (a), ou de l'état (b) à (c) par des rotations-cube.

Le groupe $\mathfrak{D}$ a 24 éléments en voici :

Isométries positives :
Identité (1)
RotCentre ±90° (3+3)
RotCentre 180° (3)
RotArete 180° (6)
RotSommet ±120° (4+4)

Total = 24 éléments



$\mathfrak{D}$ agit (librement) sur G :
$G \times \mathfrak{D} \to G$
$(\mu, f) \to \mu \bullet f$

On définit alors la relation d'équivalence associée à '•' ainsi :

Deux états μ, ν sont dans la même classe (même boîte) ssi: il existe un $f \in \mathfrak{D}$ tel que $\mu \bullet f = \nu$
La formule du Burnside nous montre que les états du Pocket sont partagés en $|G|/24 = 3674160$ $\mathfrak{D}$-classe (de 24 éléments chaque une). En effet

$$w = \frac{1}{|\mathfrak{D}|} \sum_{f \in \mathfrak{D}} |F_f|$$

w = le nombre d'orbites = le nombre de $\mathfrak{D}$-classe

$F_f = \{\mu \in G \mid \mu \bullet f = \mu\}$, l'ensemble de points fixe de f

Comme l'action est libre on a:

$F_f = \emptyset$ si $f \neq id$ car id est le seul à aoir des points fixes.

et $F_{id} = G$ d'où

$$w = \frac{|G|}{|\mathfrak{D}|} = \frac{|G|}{24} = 3674160\ \mathfrak{D} - \text{classe}$$

Et le diamètre du graphe $\mathfrak{D}$-symétrie donne :

Distance	$\mathfrak{D}$-classe
0	1
1	6
2	27
3	120
4	534
5	2256
6	8969
7	33058

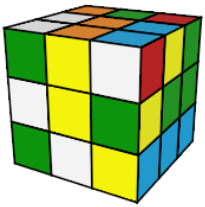
8	114149
9	360508
10	930588
11	1350852
12	782536
13	90280
14	276
Total 𝔇-classe	3674160

On a 114149 𝔇-classe à distances 8.

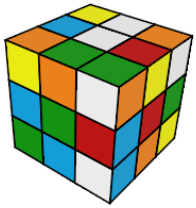
On voit que le diamètre du Pocket (le diamètre du graphe d'états) est le même que le diamètre du graphe 𝔇-symétrie, ceci rend facilement la confusion entre le nombre de 𝔇-classe et le nombre d'états .

Il y a une propriété que le Rubik's Cube possède mais le Pocket ne la possède pas. Et ceci rend facilement la confusion entre le nombre de 𝔇-classe et le nombre d'états.

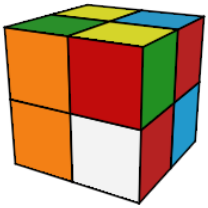
On prend un Rubik's Cube et un Pocket mélangés, et posez les sur une table avec une face devant vous.



(a)



(b)



(c)

Voici 3 images, lequel est un état ?

Pour le Rubik's Cube la réponse est immédiate c'est (b) car il garde l'orientation du Cube, tandis que (a) non, il a changé l'orientation du Cube.

Pour le Pocket on ne sait pas ! tout dépend du mélangeur, s'il a mélangé le Cube en gardant l'orientation du Cube alors c'est oui, c'est un état, si non ce n'est pas un état.

La plus part des gens déclare que (c) est un état mais en réalité c'est une configuration équivalent à un état, (c) est dans une $\mathfrak{D}$-classe d'où la confusion entre d'état et $\mathfrak{D}$-classe.

Pour résumer :

-Le Rubik's Cube a :
43 252 003 274 489 856 000 états (|G|)
901 083 401 551 872 000 $\mathfrak{I}$-classes (|G|/|$\mathfrak{I}$|).
901 083 404 981 813 616 $\mathfrak{I}$-conjugaison-classes .

-Le Pocket a :
88 179 840 états (|G|)
3 674 160 $\mathfrak{D}$-classes (|G|/|$\mathfrak{D}$|)
1 837 080 $\mathfrak{I}$-classes . (|G|/|$\mathfrak{I}$|)
1 841 970 $\mathfrak{I}$-conjugaison-classes.

Remarque important : Lorsque |G| est divisible par k on peut interpréter |G|/k comme le nombre de classes d'une certaine relation d'équivalence, et la formule de Burnside permet de calculer ces classes, ces classes sont homogènes chaque classe possède le même nombre d'éléments k.

9.16 PROGRAMMATION

Voici les programmes en GAP qui permet de calculer les $\mathfrak{I}$-conjugaison-classes ou $\mathfrak{D}$-conjugaison-classes du Pocket

Programme 1 :

```
#pap_D-pocket.txt
#       5  6  7
#       4  H  8
#       3  2  1
#25 28 23|21 26 19|17 32 31|29 30 27
#38 G  36|12 A  10|34 D  40|16 P  14
```

```
#43 44 37|39 42 33|35 48 45|47 46 41
#       11 18 9
#       20 B  24
#       13 22 15

# Iso=le groupe isometrie du cube
j1 :=
(6,46,18,26)(8,14,24,12)(38,48,36,32)(2,30,22,42)(16,20,
10,4)(28,40,44,34)
(5,45,11,17)(7,13,9,3)(21,31,41,35)(43,33,23,29)(1,25,15,
37)(47,39,19,27) ;
j2 :=
(6,16,22,14)(8,24,20,4)(38,30,40,46)(2,10,18,12)(28,32,4
8,44)(34,42,36,26)
(5,31,15,43)(7,45,13,25)(21,19,33,39)(1,35,11,23)(47,41,
27,29)(3,17,9,37);
Iso := Group(j1,j2) ;

# Dep=le groupe isometrie+ du cube (24) Dep = ssg de Iso
d1 :=
(1,11)(2,18)(3,9)(4,24)(5,15)(6,22)(7,13)(8,20)(10,12)

(14,16)(17,37)(19,39)(21,33)(23,35)(25,45)(26,42)(27,4
7)(28,48)(29,41)
     (30,46)(31,43)(32,44)(34,36)(38,40);
d2 :=
(1,15)(2,22)(3,13)(4,20)(5,11)(6,18)(7,9)(8,24)(10,16)(1
2,14)

(17,45)(19,47)(21,41)(23,43)(25,37)(26,46)(27,39)(28,4
4)(29,33)(30,42)
     (31,35)(32,48)(34,40)(36,38) ;
d3 := (1,17,19)(2,32,10)(3,31,33)(4,40,42)
```

```
(5,45,39)(6,48,12)(7,35,21)(8,34,26)(9,23,29)(11,25,47)(
13,43,41)
      (14,22,44)(15,37,27)(16,18,28)(20,38,46)(24,36,30);

d4 :=
(1,35,11,23)(2,10,18,12)(3,17,9,37)(4,8,24,20)(5,31,15,43
)

(6,16,22,14)(7,45,13,25)(19,33,39,21)(26,34,42,36)(27,29
,47,41)
      (28,32,48,44)(30,40,46,38) ;

Dep := Group(d1,d2,d3,d4) ;

#IsSubgroup( Iso, Dep ) ;

# Rubik=le groupe du Rubik's Cube
#pH := (2,4,6,8)(26,28,30,32)
(1,3,5,7)(17,21,25,29)(19,23,27,31) ;
#pB := (18,24,22,20)(42,48,46,44)
(9,15,13,11)(33,45,41,37)(35,47,43,39);
#pA := (2,34,18,36)(26,10,42,12)
(1,35,11,23)(17,9,37,3)(19,33,39,21);
#pP := (6,38,22,40)(30,14,46,16)
(7,25,13,45)(29,27,41,47)(31,5,43 ,15);
#pG := (4,12,20,14)(28,36,44,38)
(3,39,13,27)(21,11,41,5)(23,37,43,25);
#pD := (8,16,24,10)(32,40,48,34)
(1,29,15,33)(17,31,45,35)(19,7,47,9);
#Rubik := Group(pH,pB,pA,pP,pG,pD);

# Pocket=le groupe Pocket (= Rubik sans arêtes)
pH :=  (1,3,5,7)(17,21,25,29)(19,23,27,31) ;
```

```
pB :=  (9,15,13,11)(33,45,41,37)(35,47,43,39);
pA :=  (1,35,11,23)(17,9,37,3)(19,33,39,21);
pP :=  (7,25,13,45)(29,27,41,47)(31,5,43 ,15);
pG :=  (3,39,13,27)(21,11,41,5)(23,37,43,25);
pD :=  (1,29,15,33)(17,31,45,35)(19,7,47,9);
Pocket := Group(pH,pB,pA,pP,pG,pD);

G := Pocket ;;
GG := "Pocket" ;;
J := Dep ;;
JJ := "D" ;;

etat := 0 ;;
Jcjg := 0 ;;

   # Les classes des sous groupes conjugaisons de J
   Cl := ConjugacyClassesSubgroups( J );;
   ptfixe := [];

         Print("\n\n No \tetat \tclasses-conjugaisons\n" );
         Print("==================================
================ \n" );
   # pour tout classe Cl[i], on cherche les pt fixes générés
par Cl[i]
   for i  in [Length(Cl),Length(Cl)-1..1]  do

      # prendre un représentant
      H := Representative( Cl[i] );

      # les pt fixes engendrés par H
      aux := Size( Centralizer( G, H ) );

      # si Q inclus dans H,on supprime dans H les pt fixes
générés par Q
```

```
    for k  in [Length(Cl),Length(Cl)-1..i+1]  do
      for Q  in Elements( Cl[k] )  do
        if IsSubgroup( Q, H )  then
                aux := aux - ptfixe[k];
        fi;
      od;
    od;

    # sauver les pt fixes génégrés par H
    ptfixe[i] := aux;

    # print N° classe
    Print("\n ", i, ":\t" );

    # le nbr de pt fixes (= nbr états) générés par Cl[i]
    Print( Size(Cl[i]) *  ptfixe[i], "\t" );
                etat := etat + ( Size(Cl[i]) *  ptfixe[i] );

    # le nbr de J-cjg classes générés par Cl[i]
    Print( (Size(Cl[i]) *  ptfixe[i]) /  Index(J,H), " " );
Jcjg := Jcjg + ( (Size(Cl[i]) *  ptfixe[i] )/  Index(J,H) );

  od;
        Print("\n\n ",GG," = ", etat, "\n" );
        Print("\n ",JJ,"-cjg = ", Jcjg , "\n" );
```

```
 No     etat    classes-conjugaisons
gap> ================================================
gap> gap> > > >
```

```
(5,45,11,17)(7,13,9,3)(21,31,41,35)(43,33,23,29)(1,25,15,
37)(47,39,19,27) ;
j2 :=
(6,16,22,14)(8,24,20,4)(38,30,40,46)(2,10,18,12)(28,32,4
8,44)(34,42,36,26)
(5,31,15,43)(7,45,13,25)(21,19,33,39)(1,35,11,23)(47,41,
27,29)(3,17,9,37);
Iso := Group(j1,j2) ;

# Dep=le groupe isometrie+ du cube (24) Dep = ssg de Iso
d1 :=
(1,11)(2,18)(3,9)(4,24)(5,15)(6,22)(7,13)(8,20)(10,12)

(14,16)(17,37)(19,39)(21,33)(23,35)(25,45)(26,42)(27,4
7)(28,48)(29,41)
    (30,46)(31,43)(32,44)(34,36)(38,40);
d2 :=
(1,15)(2,22)(3,13)(4,20)(5,11)(6,18)(7,9)(8,24)(10,16)(1
2,14)

(17,45)(19,47)(21,41)(23,43)(25,37)(26,46)(27,39)(28,4
4)(29,33)(30,42)
    (31,35)(32,48)(34,40)(36,38) ;
d3 := (1,17,19)(2,32,10)(3,31,33)(4,40,42)

(5,45,39)(6,48,12)(7,35,21)(8,34,26)(9,23,29)(11,25,47)(
13,43,41)
    (14,22,44)(15,37,27)(16,18,28)(20,38,46)(24,36,30);

d4 :=
(1,35,11,23)(2,10,18,12)(3,17,9,37)(4,8,24,20)(5,31,15,43
)
```

```
(6,16,22,14)(7,45,13,25)(19,33,39,21)(26,34,42,36)(27,29
,47,41)
      (28,32,48,44)(30,40,46,38) ;

Dep := Group(d1,d2,d3,d4) ;

# Rubik=le groupe du Rubik's Cube
#pH := (2,4,6,8)(26,28,30,32)
(1,3,5,7)(17,21,25,29)(19,23,27,31) ;
#pB := (18,24,22,20)(42,48,46,44)
(9,15,13,11)(33,45,41,37)(35,47,43,39);
#pA := (2,34,18,36)(26,10,42,12)
(1,35,11,23)(17,9,37,3)(19,33,39,21);
#pP := (6,38,22,40)(30,14,46,16)
(7,25,13,45)(29,27,41,47)(31,5,43 ,15);
#pG := (4,12,20,14)(28,36,44,38)
(3,39,13,27)(21,11,41,5)(23,37,43,25);
#pD := (8,16,24,10)(32,40,48,34)
(1,29,15,33)(17,31,45,35)(19,7,47,9);
#Rubik := Group(pH,pB,pA,pP,pG,pD);

# Pocket=le groupe Pocket (= Rubik sans arêtes)
pH :=  (1,3,5,7)(17,21,25,29)(19,23,27,31) ;
pB :=  (9,15,13,11)(33,45,41,37)(35,47,43,39);
pA :=  (1,35,11,23)(17,9,37,3)(19,33,39,21);
pP :=  (7,25,13,45)(29,27,41,47)(31,5,43 ,15);
pG :=  (3,39,13,27)(21,11,41,5)(23,37,43,25);
pD :=  (1,29,15,33)(17,31,45,35)(19,7,47,9);
Pocket := Group(pH,pB,pA,pP,pG,pD);

G := Pocket ;;
GG := "Pocket" ;;
J := Iso ;;
```

```
JJ := "J" ;;

Jcjg := Sum(J,f -> Size(Centralizer(G,f))) / Size(J);;
Print("\n\n ",GG," = ", Size(G), "\n" );
Print("\n ",JJ,"-cjg = ", Jcjg, "\n" );
```

```
 Pocket = 88179840
gap>
 J-cjg = 1841970
gap> gap> gap>
C:\GAP4R4\bin>
```

Programme 3 :

```
#gap_J-pocket-cjg.txt
#       5  6  7
#       4  H  8
#       3  2  1
#25 28 23|21 26 19|17 32 31|29 30 27
#38 G  36|12 A  10|34 D  40|16 P  14
#43 44 37|39 42 33|35 48 45|47 46 41
#       11 18 9
#       20 B  24
#       13 22 15

# Iso=le groupe isometrie du cube
j1 :=
(6,46,18,26)(8,14,24,12)(38,48,36,32)(2,30,22,42)(16,20,
10,4)(28,40,44,34)
(5,45,11,17)(7,13,9,3)(21,31,41,35)(43,33,23,29)(1,25,15,
37)(47,39,19,27) ;
```

```
j2 :=
(6,16,22,14)(8,24,20,4)(38,30,40,46)(2,10,18,12)(28,32,4
8,44)(34,42,36,26)
(5,31,15,43)(7,45,13,25)(21,19,33,39)(1,35,11,23)(47,41,
27,29)(3,17,9,37);
Iso := Group(j1,j2) ;

# Dep=le groupe isometrie+ du cube (24) Dep = ssg de Iso
d1 :=
(1,11)(2,18)(3,9)(4,24)(5,15)(6,22)(7,13)(8,20)(10,12)

(14,16)(17,37)(19,39)(21,33)(23,35)(25,45)(26,42)(27,4
7)(28,48)(29,41)
    (30,46)(31,43)(32,44)(34,36)(38,40);
d2 :=
(1,15)(2,22)(3,13)(4,20)(5,11)(6,18)(7,9)(8,24)(10,16)(1
2,14)

(17,45)(19,47)(21,41)(23,43)(25,37)(26,46)(27,39)(28,4
4)(29,33)(30,42)
    (31,35)(32,48)(34,40)(36,38) ;
d3 := (1,17,19)(2,32,10)(3,31,33)(4,40,42)

(5,45,39)(6,48,12)(7,35,21)(8,34,26)(9,23,29)(11,25,47)(
13,43,41)
    (14,22,44)(15,37,27)(16,18,28)(20,38,46)(24,36,30);

d4 :=
(1,35,11,23)(2,10,18,12)(3,17,9,37)(4,8,24,20)(5,31,15,43
)

(6,16,22,14)(7,45,13,25)(19,33,39,21)(26,34,42,36)(27,29
,47,41)
```

```
    (28,32,48,44)(30,40,46,38) ;

Dep := Group(d1,d2,d3,d4) ;

# Rubik=le groupe du Rubik's Cube
#pH := (2,4,6,8)(26,28,30,32)
(1,3,5,7)(17,21,25,29)(19,23,27,31) ;
#pB := (18,24,22,20)(42,48,46,44)
(9,15,13,11)(33,45,41,37)(35,47,43,39);
#pA := (2,34,18,36)(26,10,42,12)
(1,35,11,23)(17,9,37,3)(19,33,39,21);
#pP := (6,38,22,40)(30,14,46,16)
(7,25,13,45)(29,27,41,47)(31,5,43 ,15);
#pG := (4,12,20,14)(28,36,44,38)
(3,39,13,27)(21,11,41,5)(23,37,43,25);
#pD := (8,16,24,10)(32,40,48,34)
(1,29,15,33)(17,31,45,35)(19,7,47,9);
#Rubik := Group(pH,pB,pA,pP,pG,pD);

# Pocket=le groupe Pocket (= Rubik sans arêtes)
pH :=  (1,3,5,7)(17,21,25,29)(19,23,27,31) ;
pB :=  (9,15,13,11)(33,45,41,37)(35,47,43,39);
pA :=  (1,35,11,23)(17,9,37,3)(19,33,39,21);
pP :=  (7,25,13,45)(29,27,41,47)(31,5,43 ,15);
pG :=  (3,39,13,27)(21,11,41,5)(23,37,43,25);
pD :=  (1,29,15,33)(17,31,45,35)(19,7,47,9);
Pocket := Group(pH,pB,pA,pP,pG,pD);

G := Pocket ;;
GG := "Pocket" ;;
J := Iso ;;
JJ := "J" ;;
```

```
Jcjg := Sum(ConjugacyClasses(J),i -> (Size(i) *
Size(Centralizer(G,Representative(i)))) / Size(J));;
Print("\n\n ",GG," = ", Size(G), "\n" );
Print("\n ",JJ,"-cjg = ", Jcjg, "\n" );
```

```
 Pocket = 88179840
gap>
 J-cjg = 1841970
gap> gap> gap>
C:\GAP4R4\bin>
```

Programme 4 :

```
#gap_pocket-rechercher-ordre.txt durée: 1h10
#      5   7
#        H
#      3   1
#25   23|21   19|17   31|29   27
#  G   |  A   |  D   |  P
#43   37|39   33|35   45|47   41
#      11   9
#        B
#      13   15
# Pocket=le groupe Pocket (= Rubik sans arêtes)
pH :=  (1,3,5,7)(17,21,25,29)(19,23,27,31) ;;
pB :=  (9,15,13,11)(33,45,41,37)(35,47,43,39);;
pA :=  (1,35,11,23)(17,9,37,3)(19,33,39,21);;
pP :=  (7,25,13,45)(29,27,41,47)(31,5,43 ,15);;
pG :=  (3,39,13,27)(21,11,41,5)(23,37,43,25);;
pD :=  (1,29,15,33)(17,31,45,35)(19,7,47,9);;
pPsi := (1,17,19);;
Pocket := Group( pH, pB, pA, pP, pG, pD );;
```

```
#Pocket := SymmetricGroup(8);; #un test


myordre :=
[0,0,0,
```

```
1
4
2
15
6
10
9
12
18
3
45
21
36
7
30
8
5
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
C:\GAP4R4\bin>
```

Programme 5 :

```
#gap_nbr-elet-ordre.txt 1h10
#       5    7
#         H
#       3    1
#25   23|21   19|17   31|29   27
#  G   |  A   |  D   |  P
#43   37|39   33|35   45|47   41
#       11   9
#         B
#       13   15
# Pocket=le groupe Pocket (= Rubik sans arêtes)
pH :=  (1,3,5,7)(17,21,25,29)(19,23,27,31) ;
pB :=  (9,15,13,11)(33,45,41,37)(35,47,43,39);
pA :=  (1,35,11,23)(17,9,37,3)(19,33,39,21);
pP :=  (7,25,13,45)(29,27,41,47)(31,5,43 ,15);
pG :=  (3,39,13,27)(21,11,41,5)(23,37,43,25);
pD :=  (1,29,15,33)(17,31,45,35)(19,7,47,9);
pPsi := (1,17,19);
Pocket := Group( pH, pB, pA, pP, pG, pD );

O1 := 0 ;
O2 := 0 ;
O3 := 0 ;
O4 := 0 ;
O5 := 0 ;
O6 := 0 ;
O7 := 0 ;
O8 := 0 ;
O9 := 0 ;
O10 := 0 ;
O12 := 0 ;
O15 := 0 ;
O18 := 0 ;
```

```
O21 := 0 ;
O30 := 0 ;
O36 := 0 ;
O45 := 0 ;

for g in Pocket do
    O := Order (g);

            if   (O = 1)   then O1 :=  O1 + 1;
            elif (O = 2)   then O2 :=  O2 + 1;
            elif (O = 3)   then O3 :=  O3 + 1;
            elif (O = 4)   then O4 :=  O4 + 1;
            elif (O = 5)   then O5 :=  O5 + 1;
            elif (O = 6)   then O6 :=  O6 + 1;
            elif (O = 7)   then O7 :=  O7 + 1;
            elif (O = 8)   then O8 :=  O8 + 1;
            elif (O = 9)   then O9 :=  O9 + 1;
            elif (O = 10)  then O10 := O10 + 1;
            elif (O = 12)  then O12 := O12 + 1;
            elif (O = 15)  then O15 := O15 + 1;
            elif (O = 18)  then O18 := O18 + 1;
            elif (O = 21)  then O21 := O21 + 1;
            elif (O = 30)  then O30 := O30 + 1;
            elif (O = 36)  then O36 := O36 + 1;
            else
                    O45 := O45 + 1;
                   der45 := O;

            fi;

od;
```

```
total :=
01+02+03+04+05+06+07+08+09+010+012+015+018
+021+030+036+045 ;;

Print( "\n 01 = ", 01);
Print( "\n 02 = ", 02);
Print( "\n 03 = ", 03);
Print( "\n 04 = ", 04);
Print( "\n 05 = ", 05);
Print( "\n 06 = ", 06);
Print( "\n 07 = ", 07);
Print( "\n 08 = ", 08);
Print( "\n 09 = ", 09);
Print( "\n 010 = ", 010);
Print( "\n 012 = ", 012);
Print( "\n 015 = ", 015);
Print( "\n 018 = ", 018);
Print( "\n 021 = ", 021);
Print( "\n 030 = ", 030);
Print( "\n 036 = ", 036);
Print( "\n 045 = ", 045);
Print( "\n total = ", total);
Print( "\n der45 = ", der45);
```

```
O1 = 1
O2 = 21819
O3 = 355994
O4 = 1440180
O5 = 108864
O6 = 8859102
O7 = 4199040
O8 = 11022480
O9 = 2340576
O10 = 979776
O12 = 12950280
O15 = 4790016
O18 = 16057440
O21 = 8398080
O30 = 7838208
O36 = 4898880
O45 = 3919104

total = 88179840

der45 = 45

C:\GAP4R4\bin>
```

10 LE MEGAMINX

10.1 DESCRIPTION



Inventeurs: Kersten Meier, Ben Halpern
Année: 1990.

Le Mégaminx a pratiquement la même structure que le Rubik's Cube !!, ce qui fait que 99,99% des formules du RC seront applicables !!

Le Mégaminx vérifie la formule d'Euler:
F=Faces, S=Sommets, A=Arêtes,

S+F-A = 2

Le Mégaminx est formé de 62 pièces divisées en 3 catégories:
1. Les centres (12) : ils se trouvent au centre de la face portant une seule couleur, c'est sa couleur qui détermine la couleur de la face. ils ne bougent pas.
2. Les arêtes (30): portant 2 couleurs, elles se déplacent
3. Les sommets (20): portant 3 couleurs, ils se déplacent aussi

Mais les arêtes ne se mettent jamais à une place des sommets et inversement. Chaqu'un reste dans son groupe, les arêtes dans le groupe des arêtes, les sommets dans le groupe des sommets.

10.2 FIXER LE TWIST

Tenez un Megaminx (standard) en face de vous ou mieux encore posez le sur la table, le twist possède alors 12 faces nommées ainsi, (dans cet ordre) :

H(aut) > B(as) > A(vant) > P(ostérieur) > G(auche)
D(roite) > $\underline{H}$(aut-opposé) > $\underline{B}$(as-opposé) > ...

En abrégeant :

H > B > A > P > G > D > $\underline{H}$ > $\underline{B}$ > ...

Et pour nous les couleurs standards (dans cet ordre, l'ordre provient du marquage) seront :

b(lanc) > j(aune) > v(ert) > k(lein) > o(range) > r(ouge) > ...

b'(lanc-clair) > j'(aune-clair) > ...

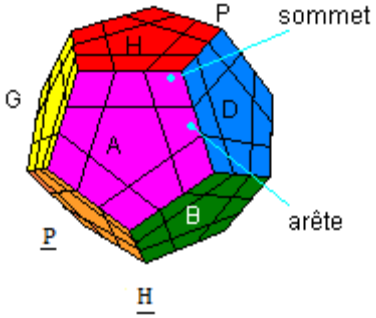
En abrégeant :

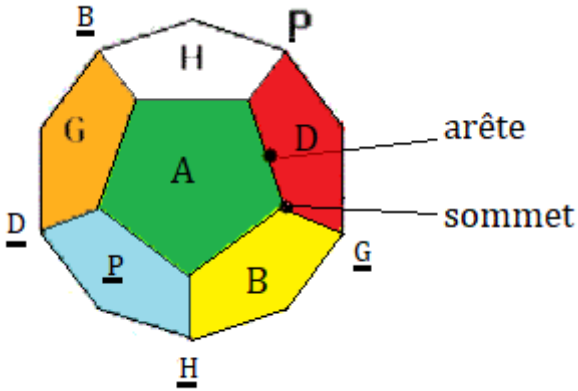
b > j > v > k > o > r > b'> j' > ...

Et ces couleurs seront associées aux faces de la façons suivantes:

H(aut) = b(lanc), B(as) = j(aune), A(vant) = v(ert), P(ostérieur) = k(lein), G(auche) = o(range), D(roite) = r(ouge) , H(aut-opposé) = b'(lanc-clair), B(as-opposé) = j'(aune-claire) ....

On dit qu'on a fixé, ou orienté le Cube.





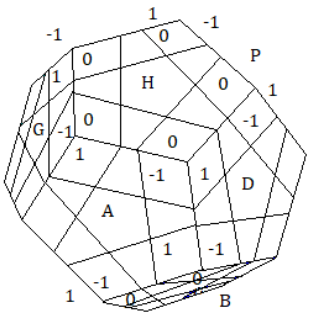
Nom des faces avec les couleurs standards

Il y a d'une part des emplacements-sommets à 3 facettes marquées 0, 1, -1 et d'autre part les sommets ayant 3 couleurs dont l'une est dominante. Lorsqu'un sommet se loge dans un emplacement-sommet et que sa couleur dominante est sur la facette marquée -1 on dit que l'orientation de ce sommet vaut -1, de même si sa couleur dominante est sur 1 son orientation vaut 1, sur 0 son orientation vaut 0 dans ce cas on dit que le sommet est bien orienté.

10.3 LE MARQUAGE DES FACETTES-SOMMETS

Il y a des emplacements-sommets à 3 facettes marquées comme indiqué sur la fig5, et les sommets (numérotés comme indiqué la fig6) ayant 3 couleurs dont l'une est dominante.

Voici le marquage des 20 sommets:
1. La face H(5) que des 0, puis dans le sens horaire on marque 1,-1
2. L'équateur (10): pour les sommets (BAD), (BPA) on marque B=0 puis dans le sens horaire on marque 1,-1
3. Tourner le cube suivant H', ^{t}H' : marquer la face G, comme la face A .
4. Marquer H(5) comme H



emplacements-sommets avec les facettes marquées dans le sens horaire
0 = bien orienté

Les facettes dominantes sont les facettes marquées zéro 0.

Un emplacement-sommet est un objet à facettes, il a un nom, l'initial des facettes qui le composent, et ils sont notés entre parenthèses .

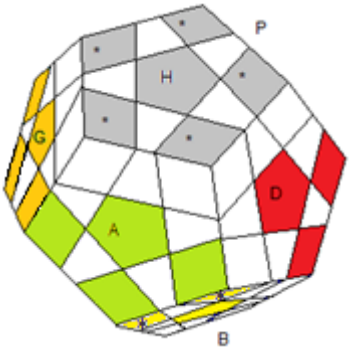
Pour les noms de ces emplacements on utilise la règle : "facette dominante + sens horaire"

Ce qui nous donne les 20 noms des emplacement-sommets dans cet ordre (l'ordre : sens horaire):

(HDA), (HAG), ...
(BAD), (BPA) , ...
(HPB), (HDP), ... , (HBG) .

10.4 LA COULEUR DOMINANTE D'UN SOMMET

Pour un sommet, quelle est sa couleur dominante ? et pourquoi ?
Pour savoir la couleur dominante d'un sommet c'est très simple une fois le marquage est donné. A l'état résolu, la couleur dominante c'est la couleur qui est sur zéro 0.
Parce que à l'état résolu tous les sommets sont en bonne orientation



* = les couleurs dominantes (* placé sur 0)

Les couleurs dominantes sont les couleurs marquées zéro 0 .

Un sommet est un objet à couleurs, il a un nom, l'initial des couleurs qui le composent, et ils sont notés entre parenthèses .

Pour les noms des sommets on utilise la règle :

"couleur dominante + sens horaire"

Ce qui nous donne les 20 noms des sommets, dans cet ordre (l'ordre : sens horaire):

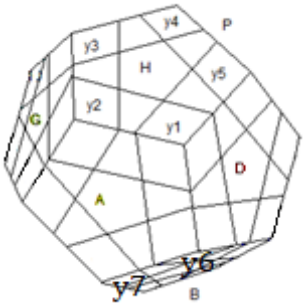
b' = blanc-clair, k'=klein-clair, ...

(brv), (bvo), ...
(jvr), (jk'v) , ...
(b'k'j), (b'r'k'), ... , (b'jo').

10.5 NUMEROTATION DES SOMMETS

On va numéroter les sommets en y_i (dans le sens horaire) comme indique la fig. ci-dessous :

(brv)=y_1 , (bvo)=y_2 , ...
(jvr)=y_6 , (jk'v)=y_7 , ...
(b'k'j)=y_{16} , (b'r'k')=y_{17} , ... , (b'jo')=y_{20}



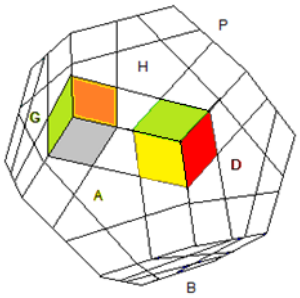
Remarque : on a placé les y_i sur la facette marquée 0

Au départ les emplacements-sommets contiennent les y_i comme suite:

(HDA)=y_1 , (HAG)=y_2 , ...
(BAD)=y_6 , (BPA)=y_7 , ...
(HPB)=y_{16} , (HDP)=y_{17} , ... , (HBG)=y_{20} .

10.6 ORIENTATION DES SOMMETS

Les sommets y_i se baladent pour se placer dans les emplacements-sommets, à chaque fois que la couleur dominante se trouve sur une facette marquée 1 son orientation vaut 1 (1 twist) , sur -1 son orientation vaut -1 (-1 twist) , sur 0 son orientation vaut zéro (0 twist, 0=bien orienté). Par exemple, le sommet (jvr) = y_6 se place en (HDA) avec jaune=A alors y_6 vaut -1 (-1 twist) car la couleur dominante jaune est sur la facette -1, de même pour le sommet (bvo) = y_2 dans (HAG) avec blanc=A alors y_2=1 (1 twist) car la couleur dominante blanc se trouve sur 1 .



y_6=1

10.7 LE MARQUAGE DES FACETTES-ARETES

Nous décidons de marquer les facettes des arêtes comme indique la fig. ci-dessous, voici le diagramme de marquage des emplacements des arêtes .

Le marquage des arêtes (30):

1. La face H(5) que des 0
2. équateur-Haut (5): (AD) avec A=0
équateur (10): (BA) avec B=0, (PA) avec P=0
équateur-Bas (5): (BP) avec B=0
3. tourner le cube suivant H' , ^{t}H' : marquer la face G comme la face A
4. La face H(5) que des 0

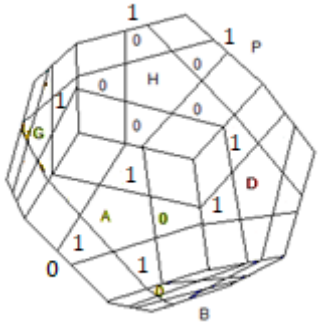


fig1: emplacements-arêtes avec les facettes marquées
0 = bien orienté

Un emplacement-arête est un objet à facettes, il a un nom, l'initial des facettes qui le composent, et ils sont notés entre parenthèses .

Pour les noms de ces emplacements on utilise la règle :

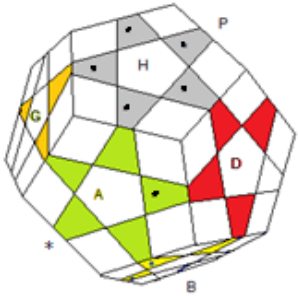
"facette dominante"

Voici les 12 noms des emplacements-arêtes dans cet ordre (l'ordre: sens horaire) :

le Haut (5): (HA), (HG), ...
l'équateur-Haut (5) : (AD), (GA), ...
l'équateur (10) : (BA), (PA), ...
l'équateur Bas (5): (BP), (PD), ...
le Bas (5) : (HB), (HP), ...

10.8 LA COULEUR DOMINANTE D'UNE ARETE

Pour une arête, quelle est sa couleur dominante ? et pourquoi ?
Une fois le marquage est donné, à l'état résolu, la couleur dominante c'est la couleur qui est sur zéro 0. Parce que à l'état résolu tous les arêtes sont en bonne orientation



* = les couleurs dominantes placé sur 0)

Les couleurs dominantes sont marquées zéro 0.

Une arête est un objet à couleurs, elle a un nom, l'initial des couleurs qui la composent, et elles sont notées entre parenthèses .

Pour les noms des arêtes on utilise la règle :

"couleur dominante"

Voici les 30 noms des arêtes dans cet ordre :

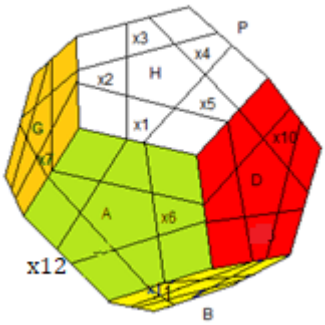
b'=blanc-clair, k'=klein-clair, ...

le Haut (5) : (bv), (bo), ...
l'équateur-Haut (5) : (vr), (ov), ...
l'équateur (10): (jv), (k'v), ...
l'équateur Bas (5) : (jk'), (k'r'), ...
le Bas (5) : (b'j), (b',k'), ...

10.9 NUMEROTATION DES ARETES

On va numéroter les arêtes en x_i comme indique la fig. ci-dessous :

Remarque : on a placé les x_i sur la facette marquée 0



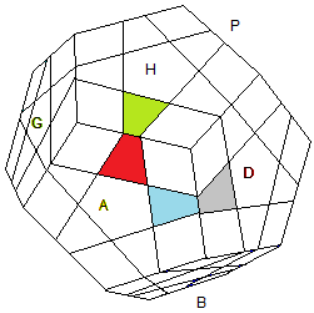
Les arêtes numérotés: x_i (dans le sens horaire)

Au départ les emplacements contiennent les x_i comme suite:

le Haut (5): (HA)=x_1 , (HG)=x_2 , ...
l'équateur-Haut (5) : (AD)=x_6 , (GA)=x_7 , ...
l'équateur (10) : (BA)=x_{11} , (PA)=x_{12} , ...
l'équateur Bas (5): (BP)=x_{21} , (PD)=x_{22} , ...
le Bas (5) : (HB)=x_{26} , (HP)=x_{27} , ...

10.10 L' ORIENTATION DES ARETES

Les arêtes x_i se baladent d'emplacements en emplacements pour se loger dans des emplacements-arêtes (HA), (HD)..., à chaque fois que la couleur dominante se trouve sur une facette marquée 1 son orientation vaut 1 (1 flip), sinon elle vaut zéro (0=bien orienté), Par exemple l'arête (vr) = x_6 se place en (HA) avec vert=H alors x_6 vaut 0 (0 flip, bien orienté) car la couleur dominante (vert) est sur la facette marquée 0, De même, si l'arête (bk) = x_4 est dans (AD) avec blanc=D alors x_4 = 1 (1 flip) car la couleur dominante blanc se trouve sur 1



x_6=0, x_4=1

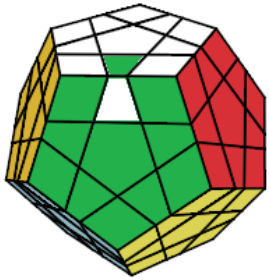
10.11 LES ROTATIONS

Les rotations de base : { H, B, A, P, G, D, H, B, A, P, G, D }

A = tourner 72° la face Avant dans le sens positif (sens des aiguilles d'une montre).
A' = tourner -72° (dans le sens négatif)
A^2 = tourner 2x72°=144° dans le sens positif

Rotation étendue Γ : Inverser une arête

1. On enlève l'arête (bv)
2. L' inverse 180°
3. Puis on la remet

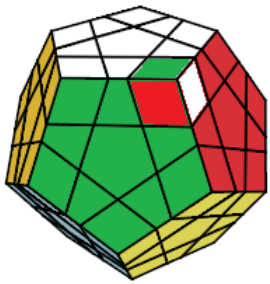


Rotation étendue Γ = $(bv)^+$

Par définition ce manœuvre se nomme rotation étendue Γ qui a comme résultat , l'arête (bv) est pivotée 180°
$(bv)^+ = \Gamma$;($(bv)^+$ on note aussi (bv)° ou $(bv)^-$)

Rotation étendues ψ : Pivoter un sommet

1. On enlève le sommet (brv)
2. Le pivote 120° dans le sens horaire
3. Puis on le remet

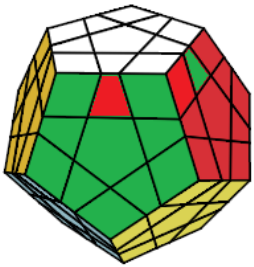


Rotation étendue $\psi = (brv)^{+}$

Ce manœuvre , par définition , se nomme rotation étendue ψ qui a comme résultat, le sommet (brv) pivoté 120° dans le sens horaire
$(brv)^{+} = \psi$

Rotation étendue $\Omega = (bv) \leftrightarrow (br)$

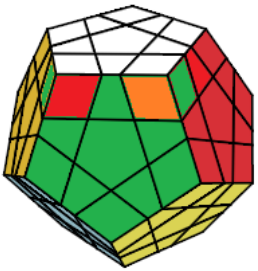
Ce manœuvre , par définition , se nomme rotation étendue Ω qui a comme résultat, les arêtes (bv) , (br) sont permutées
$(bv) \leftrightarrow (br) = \Omega$



Rotation étendue Ω = (bv)↔(br)

<u>Rotation étendue</u> χ = (brv)↔(bvo)

Ce manœuvre , par définition , se nomme rotation étendue χ qui a comme résultat, les arêtes (brv) , (bvo) sont permutées
(brv)↔(bvo) = χ



Rotation étendue χ = (brv)↔(bvo)

10.12 FORMULES

Une autre notion très importantes à comprendre: la notion de formule (= mouvement, = mélange, = manœuvre),

Définition une formule :

On note :
M = < H, B, A, P, G, D, H, B, A, P, G, D >

On dit que M est engendré par les rotations de base.

Une formule est donc une suite finie de rotations de base (et leur inverse bien sûr) avec la règle :

* On convient d'éviter de faire HH', H'H, BB', B'B, ..., HH', H'H ... etc ... dans une formule.

par ex:

AHB'P^{2}DPGB' ; ok

GBHH'D^{2}BABP ; interdit: car HH'

HDH'D'HAD ; ok

et on pose

HH' = H'H = BB'= B'B = AA' = A'A = HH' = H'H = BB' = B'B = ... = I

I se nomme formule neutre (on ne fait rien)

Par définition I est une formule

Une rotation de base ou leur inverse est donc une formule.

10.13 FORMULES ETENDUES

On note :

$M^+ = < H, B, A, P, G, D, \underline{H}, \underline{B}, \underline{A}, \underline{P}, \underline{G}, \underline{D}, \Gamma, \psi, \Omega, \chi >$

M^+ est donc engendré par les 12 rotations de base et les 4 rotations étendues.
Une formule étendue est donc une suite finie de rotations contenant au moins une rotation étendue, du genre $AH\Gamma P\Omega' B\psi^2$ ...

Autrement dit on démonte le Cube, mélange un peu les pièces puis on le remonte, on obtient ainsi, par définition une formule étendue.

Là aussi , dans une formule, il est interdit de faire AA', A'A , ΓΓ', Γ'Γ, $\underline{H}H'$, $H'\underline{H}$, ...

10.14 LONGUEUR D'UNE FORMULE

La longueur d'une formule V c'est le nombre de rotations qu'elle contient et on la note |V| , par ex:

|I| = 0 il n'y a aucune rotation dans I

$|A| = 1, |A'|=1, |A^2| = 2$,

$S = \underline{H}D^3A'\underline{P}D'H^2P'^2$, $V = \Gamma^2\Omega D^3G\underline{B}A'$

$|S| = 11, |V| = 9$

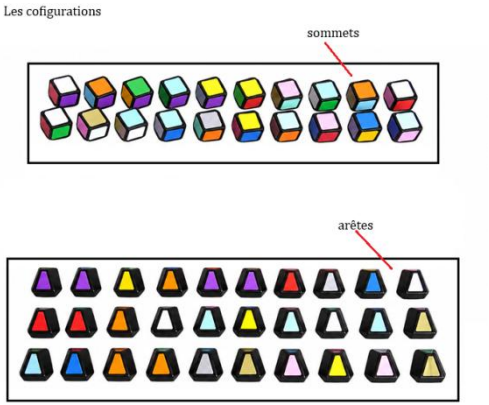
Parmi les formules qui donne l'état μ, il y a des formules de longueur minimale on note *=minimale

$A' = A^3$

$|A'|=1^*$ (*=minimale)

10.15 LE GROUPE DES CONFIGURATIONS DU MEGAMINX $(G^+, .)$

Imaginez qu'on a démonté le Megaminx, les arêtes et les sommets bougent librement mais restent dans leur camp (c'est normal, car physiquement ces pièces sont différentes).



On peut permuter ces 30 arêtes entre elles comme on veut, on a affaire à S_{30} (le groupe des permutations à 30 objets) et chaque arête possède 2 orientations, on a donc affaire à $\mathbb{Z}_2^{30}$, finalement pour les arêtes on a :

$S_{30} \times \mathbb{Z}_2^{30}$

De même pour les sommets, on peut permuter ces 20 sommets entre eux comme on veut, on a affaire à S_{20} et chaque sommet possède 3 orientations, on a donc affaire à $\mathbb{Z}_3^{20}$, pour les sommets on a :

$S_{20} \times \mathbb{Z}_3^{20}$

finalement on pose:

$G^+ = S_{30} \times \mathbb{Z}_2^{30} \times S_{20} \times \mathbb{Z}_3^{20}$

$\mu = (u, x, v, y)$ $u \in S_{30}$, $x \in \mathbb{Z}_2^{30}$, $v \in S_{20}$, $y \in \mathbb{Z}_3^{20}$

G^+ se nomme l'ensemble des configurations .

Remarque :

Pour connaître une configuration μ, il suffit de poser les 4 questions suivantes:

1) où se trouvent les 30 arêtes ? ==> S_{30}

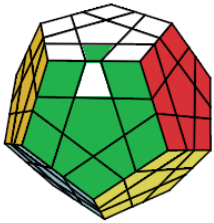
2) comment les 30 arêtes sont-elles orientées ? ==> $\mathbb{Z}_2^{30}$

3) où se trouvent les 20 sommets ? ==> S_{20}

4) comment les 20 sommets sont-ils orientés ? ==> $\mathbb{Z}_3^{20}$

$\mu = (u, x, v, y)$ $u \in S_{30}$, $x \in \mathbb{Z}_2^{30}$, $v \in S_{20}$, $y \in \mathbb{Z}_3^{20}$

Voici la visualisation des configurations



une configuration



une autre configuration

On peut voir que les centres ne sont pas bougés : Haut=blanc, Avant=vert, Droite=rouge, ...

L'orientation du Cube reste intacte.

Une configuration est une sort de motif des autocollants en respectant l'orientation du Cube, càd on mélange le Cube avec les rotations de base et étendus sans bouger, ni

tourner le Cube, c'est comme s'il y a un mécanisme qui fixe le Cube et on peut seulement tourner les faces.

10.16 LOI DE COMPOSITION DANS $(G^+,.)$

On veut définir une loi '.' dans G^+ .

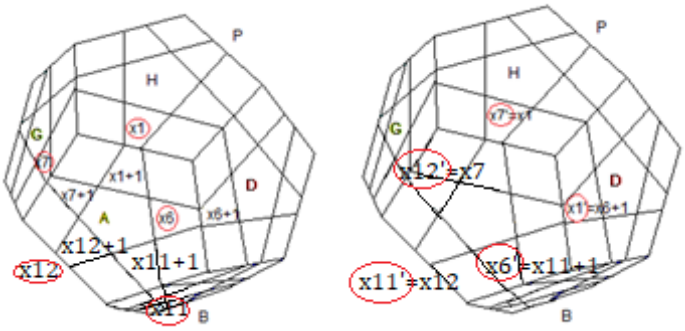
Voyons ce qui se passe pour la rotation de base A.

Soit donc (p,a,q,b) l'état associé à la rotation A :

Il suffit donc de voir ce qui se passe pour les rotations de base, voyons par exemple pour A

I) Pour les arêtes : La rotation de base A génère une permutation p et une orientation a : A → (p,a).
D'après le marquage on a:
$(HA)=(x_1,x_1+1)$, $(AD)=(x_6,x_6+1)$, $(GA)=(x_7,x_7+1)$
$(BA)=(x_{11},x_{11}+1)$, $(PA)=(x_{12},x_{12}+1)$.

Remarque : Les x_i sont placés sur la couleur dominante ou le marquage 0



Avant rotation A Après rotation A

Permutation: p = 1->6->11->12->7 = (1,6,11,12,7)

$x'_1 = x_6+1$
$x'_6 = x_{11}+1$
$x'_7 = x_1$
$x'_{11} = x_{12}$
$x'_{12} = x_7$

On note nx0 pour dire qu'il y a n zéro, ex:
(...,1,5x0,1,...)=(...,1,0,0,0,0,0,1,...)
a = (1,0,0,0,0,1,24x0) ;

x'= a + p(x)

où $p(x) = (x_{p(1)}, x_{p(2)}, x_{p(3)},..., x_{p(30)})$;permutation des x_i par p

Une formule T≠I (et l'état associé (u',x')) commence toujours par une rotation de base par ex A (l'état associé (p,a)) et le reste V (l'état associé (u,x)) on a donc :

T= AV

(u',x') = (p,a)(u,x) = (pu, a+p(x))

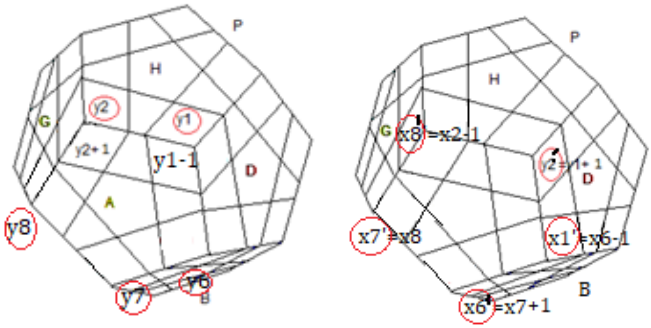
ce qui suggère que la loi dans (G^+, .) vaut (pour les arêtes):
(u,x)(u',x') = (uu', x+u(x'))

où u(x) = ($x_{u(1)}$, $x_{u(2)}$, $x_{u(3)}$,.., $x_{u(30)}$) ; permutation des x_i par u

II) Pour les sommets : De même la rotation de base A génère une permutation q et une orientation b: A → (q,b). D'après le marquage on a:

(HDA)=(y_1,y_1+1,y_1-1), (BAD)=(y_6,y_6+1,y_6-1),
(BPA)=(y_7,y_7+1,y_7-1), (PGA)=(y_8,y_8+1,y_8-1)
(HAG)=(y_2,y_2+1,y_2-1)

Remarque : Les y_i sont placés sur la couleur dominante ou le marquage 0.



Avant la rotation A Après la rotation A

Permutation: q = 1→6→7→8→2 = (1,6,7,8,2)

$y'_1 = y_6 - 1$
$y'_2 = y_1 + 1$
$y'_6 = y_7 + 1$
$y'_7 = y_8$
$y'_8 = y_2 - 1$

b = (-1,1,0,0,0,1,0,-1,12x0)
y' = b + q(y)

où $q(y) = (y_{q(1)}, y_{q(2)}, y_{q(3)}, \ldots, y_{q(20)})$

Orientation: b = (-1,1,0,0,0,1,0,-1,12x0) on a bien b = 0 (mod 3)

Une formule T≠I (et l'état associé (v',y')) commence toujours par une rotation de base par ex A (l'état associé (q,b)) et le reste V (l'état associé (v,y)) on a donc :

$T = AV$

$(v',y') = (q,b)(v,y) = (qv, b+q(y))$

ce qui suggère que la loi dans $(G^+, .)$ vaut (pour les sommets):
$(v,y)(v',y') = (vv', y+v(y'))$

où $v(y) = (y_{v(1)}, y_{v(2)}, y_{v(3)},..., y_{v(20)})$

On va donc définir la loi '.' dans G^+ comme suite:

$\mu,\mu' \in G^+$

$\mu = (u,x,v,y)$ et $\mu' = (u',x',v',y')$
$\mu\mu' = (u,x,v,y)(u',x',v',y') = (uu', x+u(x'), vv', y+v(y'))$

où

$u(x) = (x_{u(1)}, x_{u(2)}, x_{u(3)},..., x_{u(30)})$; permutation des x_i par u

$v(y) = (y_{v(1)}, y_{v(2)}, y_{v(3)},..., y_{v(20)})$; permutation des y_i par v

Voyons si cette loi confère à $(G^+, .)$ une structure de groupe.

1) $\mu,\mu' \in G^+ \Rightarrow \mu\mu' \in G^+$; c'est bien une loi interne

2) $e = (id,0,id,0)$ élément neutre

$\mu e = (u,x,v,y)(id,0,id,0) = (u, x+u(0), v, y+v(0)) = (u,x,v,y)$

$e\mu = (id,0,id,0)\ (u,x,v,y) = (u, 0+id(x), v, 0+id(y)) = (u,x,v,y)$

3) $\mu^{-1} = (u^{-1}, u^{-1}(-x), v^{-1}, v^{-1}(-y))$

4) (μμ')μ'' = μ(μ'μ'')

(G^+, .) est bien un groupe.

(10.16.1) Rotations de base vérivient les lois:

Pour la rotation de base A, avec e•A = (p,a,q,b) , on a remarqué qu' elle vérifie :

(F) a=0 (mod 2)

(T) b=0 (mod 3)

(P) sig(p) = sig(q) = 1

on pourrait ainsi voir, pour n'importe quelle rotation de base Z∈ {H, B, A, P, G, D, h, b, a, p, g, d } elle vérifie aussi ces 3 propriétés (F), (T), (P).

10.17 LE GROUPE (M, .)

L'ensemble des formules M muni le produit (la concaténation) de deux formules forme un groupe (M, .) , en effet on a:

1. Le produit VS (on fait V puis S) d'une formule V par une formule S, est encore une formule (loi interne).
2. La formule I consiste à rien faire, on l'appelle formule neutre (élément neutre).

VI = IV = V

3. Chaque formule V a un inverse V' (noté aussi parfois V^{-1}): VV' = V'V = I (symétrique)

V = AB'H'DP ⇒ V' = P'D'HBA'

4. Faire (VT) puis S c'est la même chose que faire V puis (TS):
   (VT)S = V(TS) (associative)

(M, .) est donc un groupe , le groupe des formules du Megaminx.

On fait la même chose avec M^+ , donc (M^+, .) est aussi un groupe, le groupe des formules étendues du Megaminx .

On a évidemment M est un sous groupe de M^+.

Mais ce n'est ni M ni M^+ ce sera ce qu'on appelle le groupe du Megaminx !, contrairement à beaucoup de gens y croient .
(M^+, .) est donc le groupe des formules étendues du Megaminx , et (M, .) le groupe des formules du Megaminx.

10.18 LES ETATS DE BASE

à chaque rotation de base Z on associé une configuration μ_Z nommé état base

$Z \rightarrow \mu_Z$: $H \rightarrow \mu_H$, $B \rightarrow \mu_B$, $A \rightarrow \mu_A$, ...

Puis on définit la fonction $\mathcal{X}$ de M sur G^+ ainsi

$\mathcal{X} : M \to G^+$

$\mathcal{X}(H) = \mu_H$, $\mathcal{X}(B) = \mu_B$, $\mathcal{X}(P) = \mu_P$, ...

Puis proplonge en formule :

V = GDHP

$\mathcal{X}(V) = \mu_G\mu_D\mu_H\mu_P$

et qui vérifie ;

1) $\mathcal{X}(I) = e$

2) $\mathcal{X}(VT) = \mathcal{X}(V)\,\mathcal{X}(T)$

3) $\mathcal{X}(V) = \mathcal{X}(T) \Rightarrow V = T$;($\mathcal{X}$ est injective)

Note : (3) signifie que, par définition, deux foumules qui donnent la même configuration sont considérées comme identiques,

$\mathcal{X}$ est bijective donc M est fini car G^+ est fini

deux formules donnant la même configuration sont identiques.

10.19 L'ACTION '•' DE M SUR G+

Maintenant on définir une action libre et compatible '•' de M sur G^+ .

$G^+ \times M \to G^+$

$(\mu, V) \to \mu \bullet V = \nu \in G^+$

A_1) $\forall \mu$; $\mu \bullet I = \mu$;élément neutre

A_2) $\forall \mu, V, T$; $(\mu \bullet V) \bullet T = \mu \bullet (VT)$;associatif

A_3) $e \bullet V = e \Rightarrow V = I$

Si quelqu'un fixe e c'est forcement I , I est la seule formule qui fixe tout le monde.

(10.19.1) A_4) $\forall V, T$; $e \bullet (VT) = (e \bullet V)\ (e \bullet T)$
;compatibilité des lois de M et G

Remarque : l'axiome (A_3) montre que deux formules donnant la même configuration seront considérées comme identiques .

On pose :

$G^{\neq} = \{\mu \in G^+ \mid \exists V \in M , \mu = e \bullet V \} \subset G^+$, e = l'état résolu .

l'ensemble des configurations provenant de M, on dit aussi ce sont des états propres.

Par définition (G, .) est le groupe du Megaminx.

C'est l'ensemble des configurations provenant de M (à partir de e). Les éléments de G s'appellent état .

Remarque importante : l'axiome (A_3) montre que deux formules donnant le même état seront considérées comme identiques .

En effet

$e \bullet V = e \bullet T$ il faut montrer V = T, allons-y

$(e \bullet V) \bullet T' = (e \bullet T) \bullet T'$

$e \bullet (VT') = e \bullet (TT')$

$e \bullet (VT') = e \bullet I = e$

d'après (A_3) $VT' = I \Longrightarrow V = T$

10.20 THEOREME FONDAMENTAL

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une configuration soit un état ?

Soit $\mu=(u,x,v,y) \in G^+$

On désigne (F)lip, (T)wist, (P)arité les lois suivantes:

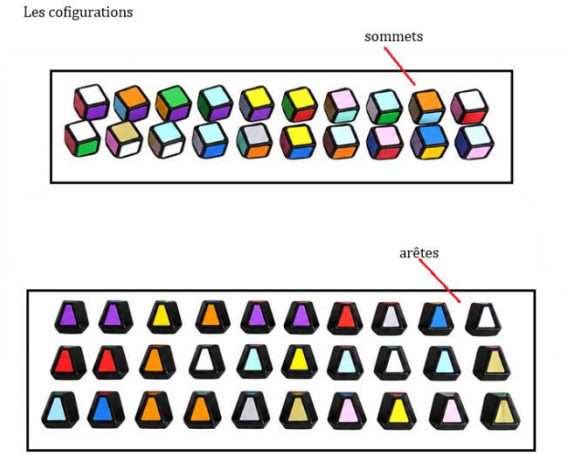
(F) $\sum x_i = 0 \pmod 2$ abrégé : $x = 0 \pmod 2$
(T) $\sum y_i = 0 \pmod 3$ abrégé : $y = 0 \pmod 3$
(P) $sig(u) = sig(v) = 1$

Théorème fondamentale :

$G = \{ \mu = (u, x, v, y) \in G^+$ vérifiant (F), (T), (P) $\}$

μ vérifiant (F), (T), (P) $\Leftrightarrow \mu \in G$

Démonstration :



On se place dans G^+ , (le Megaminx on le met dans un placard !)

¤ CS (⇒) On se donne une configuration $\mu=(u, x, v, y)\in G^+$ vérifiant (F),(T),(P), il faut montrer que $\mu\in G$

On va faire ça en plusieurs étapes.

On coupe (u, x, v, y) en deux morceaux

(u, x, v, y) = (u, x, id, 0) (id, 0, v, y)

Ce coupage suggère la construction suivante:

1) On construit d'abord les arêtes comme exige u (ignorez les autres pièces)

2) On oriente les arêtes comme exige x (sans déplacer les arêtes)

3) On construit les sommets comme exige v (sans toucher les arêtes)

4) Et finalement on pivote les sommets comme exige y (sans toucher les arêtes et les autres sommets)

On va faire ça en plusieurs étapes.

On prend 4 formules suivantes :

C = A[HD]A' ⇒ 3-cycle-arêtes (HA)->(HP)->(HD) .

O = A[HD]HA' HA .H^3A' = $(HA)^+ (HD)^+$.

E = [HA]P'[AH]P ⇒ 3-cycle-sommets

(H<u>B</u>P)->(HDA)->(HPD) .

Q = $[HA]^2P'[AH]^2P$ = $(H\underline{B}P)^-(HPQ)^+$.

<u>Construire les arêtes (u,-, - ,-)</u>

Comme u est de signature 1, sig(u)=1, et A_{30} est engendré par des 3-cycles on peut utiliser C (avec les conjugaisons) pour construire les arêtes, comme exige u . On a donc une formule V_1 telle que :

e•V_1 = (u,a_1,b_1,c_1)

Orienter les arêtes (u, x, -, -)

On utilise O (avec les conjugaisons) pour orienter les arêtes comme exige x, c'est possible car la loi des flips (F) dit on oriente toujours 2 arêtes. On a donc une formule V_2 telle que :

$e\bullet(V_1V_2) = (u,x,b_2,c_2)$

Puis on utilise E et Q pour corriger les sommets ⇒ il existe donc un V_3 telle que :

$e\bullet(V_1V_2V_3) = (u,x,id,0) \in G$

Placer les sommets (id, 0, v, -)

Comme sig(v)=1 et A_{30} est engendré par des 3-cycles on peut utiliser E (avec les conjugaisons) pour placer les sommet comme exige v . On a donc une formule V_4 telle que :

$e\bullet(V_1\, V_2\, V_3\, V_4) = (id,0,v,c)$

Orienter les sommets (id, 0, v, y)

On utilise Q (avec les conjugaisons) pour orienter les sommets comme exige y, c'est possible car la loi des twists (T) dit on pivote toujours 2 sommets de sens opposés ou 3 sommets dans le même sens. On a donc une formule V_5 telle que :

$e\bullet(V_1\, V_2\, V_3\, V_4\, V_5) = (id,0,v,y) \in G$

Finalement (u, x, id, 0), (id, 0, v, y) sont dans G donc (u, x, v, y) est aussi , car G et un groupe.

Il faut bien ramarqué qu'on a appliqué les formules sur G^+ , les configurations c'est légale car l'action est définie sur G^+, on n'applique pas les formules sur le Megaminx !!

¤ CN ($\Leftarrow$) Inversement , on part d'un état $\mu = e \bullet V$, $V \in M$, Il faut montrer que μ vérifie (F),(T),(P) .

on va raisonner par récurrence sur la longueur de $|V| = n$

* pour $n=1 \Longrightarrow V=Z$=rotation de base

or d'après la remarque (*10.16.1), les rotations de base vérifient les lois (F), (T), (P) , donc la propriété est vérifiée pour n=1

* Supposons que la propriété soit vraie pour n , montrons qu'elle reste encore vraie pour n+1.

Soit W une formule de longueur n+1, on passe de n à n+1 par une rotation de base Z.

$W = \Delta Z$; $|\Delta| = n$

avec

$e \bullet W=(u',x',v',y')$, $e \bullet \Delta=(u,x,v,y)$, $e \bullet Z=(p,a,q,b)$,

or

$e \bullet W = e \bullet (\Delta Z) = (e \bullet \Delta)(e \bullet Z)$; d'après (*10.19.1)

d'où

(F) : $(u',x') = (u,x)\ (p,a) = (up,\ x+u(a))$

x' = x + u(a)

a = 0 (mod 2) ; voir (*10.16.1)

u(a) = 0 (mod 2)

x = 0 (mod 2) ; HR

x' = 0 (mod 2)

(T) : (v',y') = (v,y) (q,b) = (vq, y+v(b))

y' = y + v(b)

b = 0 (mod 3) ; voir (*10.16.1)

v(b) = 0 (mod 3)

y = 0 (mod 3) ; HR

y' = 0 (mod 3)

(P) : sig(u') = sig(up) = sig(u) sig(p)

or

sig(p) = sig(q) = 1 ; voir (*10.16.1)

sig(u) = sig(v) = 1 ;HR

d'où

sig(u') = 1

de même

sig(v') = sig(vq) = sig(v) sig(q)

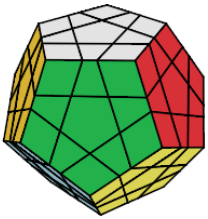
d'où

sig(v') = 1

sig(u') = sig(v') = 1

donc pour tout μ∈G , μ vérifie (F),(T),(P) .

Voici la visualisation des états



état résolu



un état

On peut voir que les centres ne sont pas bougés :
Haut=blanc, Avant=vert, Droite=rouge, ...
L'orientation du Cube reste intacte.
Un état est une sorte de motif des autocollants en respectant l'orientation du Cube, càd on mélange le Cube avec les rotations de base sans bouger, ni tourner le Cube, c'est comme s'il y a un mécanisme qui fixe le Cube et on peut seulement tourner les faces.

Remarque l'application

f: M → G
V → f(V) = μ= e•V

on vient de voit qu'elle est surjective. elle est injective par définition (par axiome3), f est donc bijective donc

$|M| = |G|$

On voit que

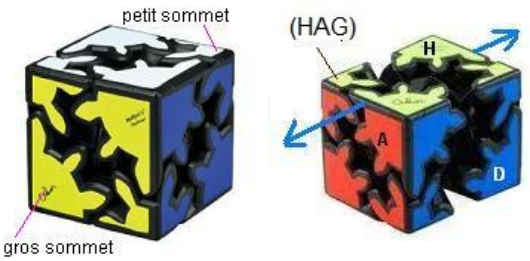
$G = \{\mu = e \bullet V , V \in M\}$
$G^+ = \{\mu = e \bullet V , V \in M^+ \}$
G = l'ensemble des configurations provenant de M, et
G^+ = l'ensemble des configurations provenant de M^+ .

11 LA FACE CACHEE DU GEAR SHIFT

Le Gear Shift ne possède pas des rotations proprement parler, les pièces ne déplacent pas elles restent sur place et pivotent seulement. Le but de ce paragraphe c'est retrouver les formules $H^{-8}G^{8}A^{-8}$, $H^{-5}D^{5}A^{-5}$ qui permettent de résoudre le Gear Shift.

Les notations

Les "rotations" du Gear Shift sont assez spéciales.
A = Écarter Avant-Postérieur, puis tourner (HAG) 1 cran dans le sens horaire.
A^{-1} = Écarter Avant-Postérieur, puis tourner (HAG) 1 cran dans le sens contraire



rotation A
1.Écarter Avant-Postérieur
2. Pivoter (HAG) un cran dans le sens horaire

Équation du type ax + by = c dans $\mathbb{Z}$

Rappelons la résolution de cette équation dans $\mathbb{Z}$
ax + by = c avec (a,b) = 1 (a et b premiers entre eux).

Comme a et b sont premiers entre eux, le théorème de Bezout dit qu'il existe des entiers u,v de $\mathbb{Z}$ tels que
au + bv = 1 (A) équation à 1 au seconde membre

Donc soit (x_0, y_0) une solution particulière de (A).
On a alors
$ax_0 + by_0 = 1$
$acx_0 + bcy_0 = c$
Or on a aussi:
ax + by = c
D'où (en faisant la soustraction)
$a(x-cx_0) + b(y-cy_0) = 0$
Soit
$a(x-cx_0) = b(cy_0 - y)$ (B)
$a|b(cy_0-y)$ donc
$a|(cy_0-y)$ (théorème de Gauss)
$ka = (cy_0-y)$ (C)
En rapportant dans (B) on trouve
$a(x-cx_0) = bka$
$x - cx_0 = kb$
Soit
$x = cx_0 + kb$
et de (C) on tire
$y = cy_0 - ka$
En résumé les solutions de ax + by = c avec (a,b)=1 sont
$x = cx_0 + bk$
$y = cy_0 - ak$
Où k est un entier (le même k pour x et y) et (x_0, y_0) une solution particulière de ax+by=1

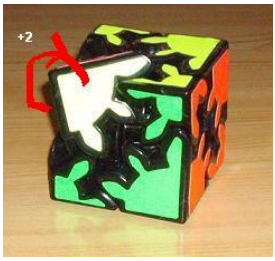
Analyse du puzzle

Le Gear Shift possède deux types de rotations: normal N, sans écarter et A, P, H, B, G, D en écartant le cube.

- Pour la rotation N quand on tourne un sommet les 7 autres tournent aussi: les gros sommets dans un sens et les petits sommets dans l'autre sens.

- Pour la rotation A, par exemple, on écarte le cube dans la direction Avant-Postérieur puis on tourne un sommet Avant les 3 autres sommets Avant tournent aussi, de même les gros sommets dans un sens, les petits dans l'autre sens

- Quand un gros sommet avance 2 crans par exemple, il peut le faire en plusieurs tours ! c'est à dire 8k+2 et le petit sommet reste invariant mais lui aussi il peut faire plusieurs tour 5m et on a la relation suivante: 8k + 2 = 5m



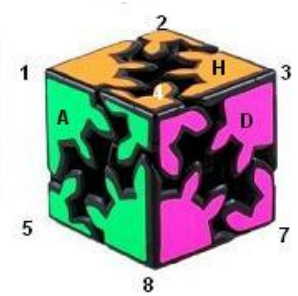
8k + 2 = 5m

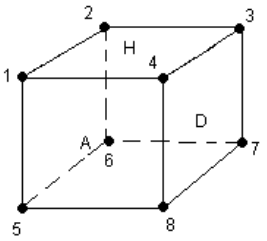


5m + 1 = 8k

Numéroter les sommets

On numérote les sommets comme indique la fig ci-dessous





Pour le sommet 1, par exemple il peut être pivoté par N , H, G, et A de même pour le sommet 2 il peut être pivoté par N, H, G, et P mais dans l'autre sens... on a donc les relations suivantes:

$N + H + G + A + a_1 = 8k_1$
$-N - H - G - P - a_2 = 5k_2$
$N + H + D + P + a_3 = 8k_3$
$-N - H - D - A - a_4 = 5k_4$
$-N - B - G - A - a_5 = 5k_5$
$N + B + G + P + a_6 = 8k_6$
$-N - B - D - P - a_7 = 5k_7$
$N + B + D + A + a_8 = 8k_8$

et sous la forme matricielle
$V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ H \\ G \\ D \\ A \\ B \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8k_1 \\ 5k_2 \\ 8k_3 \\ 5k_4 \\ 5k_5 \\ 8k_6 \\ 5k_7 \\ 8k_8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ a_2 \\ -a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ -a_6 \\ a_7 \\ -a_8 \end{pmatrix}$$

Mais ces 7 vecteurs ne sont pas tous indépendants, en effet on a:
$V_1 = V_5+V_7 = V_2+V_6 = V_4+V_3$
ou encore
$V_1 = V_4+V_3$
$V_6 = V_4+V_3-V_2$
$V_7 = V_4+V_3-V_5$
Donc on peut enlever V_1, V_6,V_7 et ne garde que V_2,V_3, V_4,V_5 on peut noter que la famille $\{V_2,V_3, V_4,V_5\}$ est libre

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ G \\ D \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8k_1 \\ 5k_2 \\ 8k_3 \\ 5k_4 \\ 5k_5 \\ 8k_6 \\ 5k_7 \\ 8k_8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ a_2 \\ -a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ -a_6 \\ a_7 \\ -a_8 \end{pmatrix}$$

Retrouver la formule $H^{-8}G^{8}A^{-8} = (HDA)^{1+}$

Le but de ce paragraphe c'est de retrouver cette formule, Supposons que le sommet 4 avance d'un cran, alors on a le système suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ G \\ D \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8k_1 \\ 5k_2 \\ 8k_3 \\ 5k_4 \\ 5k_5 \\ 8k_6 \\ 5k_7 \\ 8k_8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a:
$G = 8k_6$
$D = -5k_7$
$D + A = 8k_8$
$- H - D - A = 5k_4+1$

D'où
$A = 8k_8+5k_7$
et
$H + 5k_4 = - D - A - 1$
$H + 5k_4 = -8k_8 - 1$
Une solution particulière sans seconde membre est: H=6, k_4=-1 d'où les solutions sont
$H = -48k_8 - 6 + 5m$
$k_4 = 8k_8 + 1 - m$

D'où les solutions du système sont (elles dépendent de 4 paramètres indépendantes)
$G = 8k_6$
$D = -5k_7$
$A = 8k_8+5k_7$
$H = -48k_8 - 6 + 5m$

Si on prend
$k_6 = 1 \Rightarrow G = 8$
$k_7 = 0 \Rightarrow D = 0$
$k_8 = -1 \Rightarrow A = -8$
$m = -10 \Rightarrow H = -8$
On retrouve la formule
$(HDA)^{1+} = H^{-8}G^{8}A^{-8}$

Note : Si le sommet 4 recule d'un cran on trouvera:
$(HDA)^{1-} = H^{8}G^{-8}A^{8}$

Retrouver la formule $(HAG)^{2+} = H^{-5}D^{5}A^{-5}$

Le but de ce paragraphe c'est de retrouver cette formule, Supposons que le sommet 1 avance de 2 crans, alors on a le système suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ G \\ D \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8k_1 \\ 5k_2 \\ 8k_3 \\ 5k_4 \\ 5k_5 \\ 8k_6 \\ 5k_7 \\ 8k_8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a:
$G = 8k_6$
$D = -5k_7$
$H + G = -5k_2$
$H + G + A = 8k_1 - 2$

D'où

$H + 5k_2 = -8k_6$
Une solution particulière sans seconde membre est: H=6, k_2=-1 d'où les solutions sont
$H = -48k_6 + 5m$
$k_2 = 8k_6 - m$

De même pour
$A - 8k_1 = -2 + 40k_6 - 5m$
Une solution particulière sans seconde membre est: A=9, k_1=1 d'où les solutions sont
$A = -18 + 360k_6 - 45m - 8p$
$k_1 = -2 + 40k_6 - 5m - p$

D'où les solutions du système sont (elles dépendent de 4 paramètres indépendantes)
$G = 8k_6$
$D = -5k_7$
$H = -48k_6 + 5m$
$A = -18 + 360k_6 - 45m - 8p$

Si on prend
$k_6 = 0 \Rightarrow G = 0$
$k_7 = -1 \Rightarrow D = 5$
$m = -1 \Rightarrow H = -5$
$p = 4 \Rightarrow A = -5$
On retrouve la formule
$(HAG)^{2+} = H^{-5}D^{5}A^{-5}$

Note : Si le sommet 1 recule de 2 crans on trouvera:
$(HAG)^{2-} = H^{5}D^{-5}A^{5}$

Big théorème

On va montrer que les gros sommets ne peuvent avancer/reculer que par un pas de 2
On va reprendre les calculs précédents pour un pas a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ G \\ D \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8k_1 \\ 5k_2 \\ 8k_3 \\ 5k_4 \\ 5k_5 \\ 8k_6 \\ 5k_7 \\ 8k_8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a:
$G = 8k_6$
$D = -5k_7$
$H + G = -5k_2$
$H + G + A = 8k_1 + a$

D'où
$H + 5k_2 = -8k_6$
Une solution particulière sans seconde membre est: H=6, k_2=-1 d'où les solutions sont
$H = -48k_6 + 5m$
$k_2 = 8k_6 - m$

De même pour
$A - 8k_1 = a + 40k_6 - 5m$
Une solution particulière sans seconde membre est: A=9, k_1=1 d'où les solutions sont
$A = 9a + 360k_6 - 45m - 8p$

$k_1 = a + 40k_6 - 5m - p$

D'où les solutions du système sont (elles dépendent de 4 paramètres indépendantes)
$G = 8k_6$
$D = -5k_7$
$H = -48k_6 + 5m$
$A = 9a + 360k_6 - 45m - 8p$

1. Cas a=1
Si on prend
$k_6 = 0 \Rightarrow G = 0$
$k_7 = -1 \Rightarrow D = 5$
$m = -1 \Rightarrow H = -5$
$A = -5 = 9a + 45 - 8p$
$-5 = 9a + 45 - 8p$
$50 + 9a = 8p$ pour a = 1 pas de solution en p

2. Cas a=-1
Si on prend
$k_6 = 0 \Rightarrow G = 0$
$k_7 = 1 \Rightarrow D = -5$
$m = 1 \Rightarrow H = 5$
$A = 5 = 9a - 45 - 8p$
$5 = 9a - 45 - 8p$
$50 - 9a = -8p$ pour a = -1 pas de solution en p

Le théorème est ainsi démontré, les gros sommets se pivotent toujours un nombre pair de pas

12 LE GROUPE DU FLOPPY

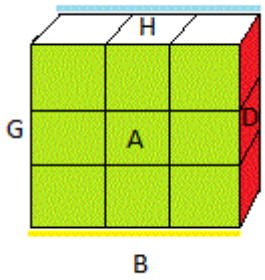
Structure mathématique du Floppy

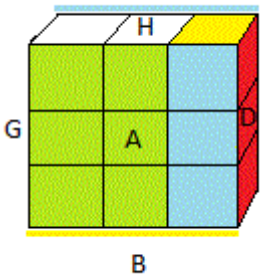
Bien que le Floppy soit un simple puzzle, mais son étude théorique est bien intéressant, car il nous aide à mieux comprendre ce qui se passe pour les puzzles plus compliqués tels que le Rubik, Skewb etc ...

Analyse

Avant d'aller plus loin, précisez bien la notion "permutation", et la notion "orientation"
- Une permutation, c'est qu'il y a un déplacement en cycles des pièces
- Une orientation, c'est qu'il y a plusieurs façons que la pièce se place (se loge) dans un emplacement.

Prenons notre Floppy Cube et analysons le:





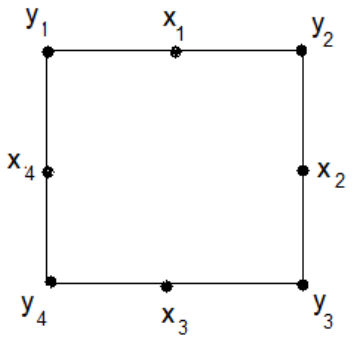
Floppy Cube D = / (lire slash)

Examinons une rotation de base par ex D (on note D=180° au lieu de D^2) on a:

1. Le sommet (bkrv) se déplace à (BAD) mais il a une seule façon de se loger dans (BAD), donc les sommets se déplacent, mais pour un emplacement donné un sommet a une seule façon de se loger dedans !! donc pour les sommets il n'y a pas d'orientation, on a affaire à S_4

2. Pour l'arête (vrk) elle ne bouge pas ! donc pas de permutations, par contre elle a 2 façons de se placer dans (AD) . Les arrêtes ne se déplacent pas mais elles ont 2 orientations, donc pour les arêtes on a affaire à $\mathbb{Z}_2^4$

Finalement pour le Floppy Cube on a affaire à quelque chose comme ça:
$G^+ = S_4 \times \mathbb{Z}_2^4$



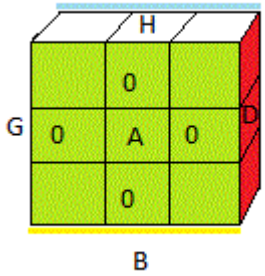
nom des pièces

Mais les déplacements des sommets ont des contraintes, par ex le sommet (bkrv) se déplace à (BAD) uniquement en permutation impaire ! et à (BGA) uniquement en permutation paire .... Les sommets ne peuvent pas se déplacer comme ils veulent. Pour aller d'un endroit à un autre ils se déplacent soit uniquement en permutations paires, soit uniquement en permutations impaires mais pas les deux.
Soit L=la longueur du chemin (le nombre n'arêtes)
$sig(u) = (-1)^L$ (*)

Pour l'orientation des arêtes, on a des valeurs alternées $0 \rightarrow 1$ et $1 \rightarrow 0$ quand on permute deux sommets donc si on pose
x_1 l'arête correspond à la rotation H
x_2 l'arête correspond à la rotation D
x_3 l'arête correspond à la rotation B
x_4 l'arête correspond à la rotation G

Alors on a
$H(x)=(1-x_1,x_2,x_3,x_4)$
$D(x)=(x_1,1-x_2,x_3,x_4)$
$B(x)=(x_1,x_2,1-x_3,x_4)$
$G(x)=(x_1,x_2,x_3,1-x_4)$

NOTE : Pour compter le nombre d'orientations des arêtes c'est simple, il suffit de compter le nombre d'autocollants kleins sur la face verte. En effet on peut marquer 0 sur la face verte (donc 1 sur la face klein) et prendre la couleur dominante est verte.



Les facettes marquées

<u>La loi interne de G^+</u>

On voudrait définir une loi '.' de composition sur G^+ , et si on observe bien les rotations de base H, D, B, G on trouve la loi de composition:
$e.H = (u,x)$
$u=(y_1,y_2)$
$x=(1-x_1,x_2, x_3,x_4)$
$(u,x)(v,y) = (uv, v(x))$

Les éléments de G se sont donc les éléments de G^+ qui vérifient la loi (*) càd
$G = \{ (u,x) \mid sig(u) = (-1)^L \}$
On rappelle que G c'est l'ensemble des états produits par $M = < G, D, H, B >$
Ce qui donne $|G| = (4!/2) \times 2^4 = 192$ on divise par 2 car les permutations doivent respecter la loi (*)

Pourquoi la contrainte (*) nous fait perdre la moitié des permutations ? parce que pour aller d'un point à l'autre on a soit que la longueur paire soit que la longueur impaire

donc dans tous les cas on n'a que la moitié des permutations c'est pourquoi il faut diviser 4! par 2 : 4!/2

Commentaire

On pourrait comparer le groupe de Floppy au groupe du Pyraminx, ou du Pocket.
En effet les 2 ont un apparence semblable

Floppy:

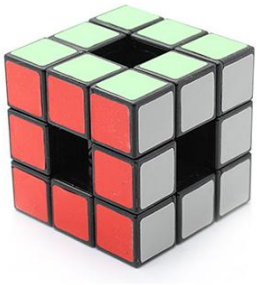
$G^+ = S_4 \times \mathbb{Z}_2^4$
Loi de composition: (u,x)(v,y) = (uv, v(x))
Pas de loi de twists
Pas de loi de flips
Loi de permutations: $sig(u) = (-1)^L$

Pyraminx:

$G^+ = S_6 \times \mathbb{Z}_2^6$
Loi de composition: (u,x)(v,y) = (uv, x+u(y))
Pas de loi de twists

Loi de flips: $\sum x_i = 0 \pmod 2$
Loi de permutations: sig(u) = 1

13 LE VOID CUBE



Un petit rappel, le Void Cube est dessiné par Katsuhiko Okamoto, et ce Cube a gagné le prix Puzzle Design Compétition en 2007. C'est un cousin du Rubik's Cube ou plutôt un "fils" !!

Récemment j'ai lu un article assez étrange, où on démontre le théorème suivant:
" Le groupe du Void Cube $\mathcal{V}$ est un sous groupe du Rubik's Cube G "

C'est vraiment étrange je dirais même contradictoire !! , en effet si on se souvient bien, les éléments du Rubik's Cube doivent vérifier sig(sommets) = sig(arêtes) or un élément du Void Cube peut avoir sig(sommets) ≠ sig(arêtes) - les états singuliers - donc si $\mathcal{V} \subset$ G il suffit de prendre un $v \in \mathcal{V}$ avec sig(sommets) ≠ sig(arêtes) on aura une contradiction car on aurait à la fois

sig(sommets) ≠ sig(arêtes) et
sig(sommets) = sig(arêtes) !!!

Je dois avouer qu'il me faut plusieurs jours pour comprendre cette contradiction (apparente).

En fin compte, si on réfléchit bien, que veut dire un ensemble $\mathcal{K}$ "incluse" dans G ? c'est simplement imposer aux éléments de $\mathcal{K}$ une condition supplémentaire c'est tout !!!
dire que $\mathcal{K} \subset$ G ça signifie par ex
$\mathcal{K}$ = { (u,x,v,y)∈G avec u((BA)) = (BA) }, l' arête (BA) ne bouge pas.

Et qu'est ce que c'est $\mathcal{V}$? c'est simplement un groupe dont on peut distinguer deux sortes d'éléments: ceux qui vérifient la condition sig(sommets) = sig(arêtes) et ceux qui ne la vérifient pas, donc si on trouve un groupe $\mathcal{K}$ et qu'on peut distinguer ses éléments du genres pairs, impairs ou valeur 1, 0 bref un truc qui a deux clans, et on aura quelque chose qui ressemble à $\mathcal{V}$.

L'idée est donc:
1. Trouver un sous ensemble $\mathcal{K}$ de G (en ajoutant une condition)
2. Montrer que $\mathcal{K}$ est un groupe
3. Remarquer que $\mathcal{K}$ a deux sortes d'éléments
4. Montrer que $\mathcal{K}$ est isomorphe à $\mathcal{V}$

On va fixer le Void Cube ainsi :

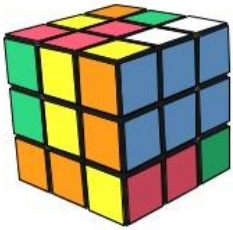
H(aut) = b(lanc), B(as) = j(aune), A(vant) = v(ert), P(ostérieur) = k(lein), G(auche) = o(range), D(roite) = r(ouge) .

Rappel les notations

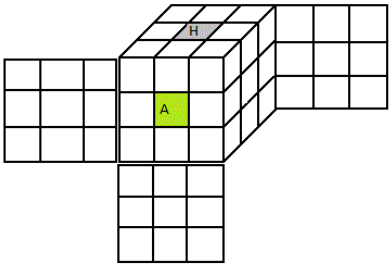
Avant tout rappelons les notations:
(HA) = l'emplacement Haut-Avant , c'est un emplacement d'une arête.
Par abuse de langage on dit aussi l'arête (HA) pour dire l'arête contenue dans l'emplacement (HA) et (bv)=blanc-vert c'est une arête , c'est une pièce, un objet à couleurs.
(HDA) = l'emplacement Haut-Droite-Avant , c'est un emplacement d'un sommet, un objet à facettes.
Par abuse de langage on dit aussi le sommet (HDA) pour dire le sommet contenu dans l'emplacement (HDA) .
(brv)=blanc-rouge-vert c'est un sommet (une pièce).

13.1 REFERENTIEL

Avant d'aller plus loin, il y a une notion très importante qu'on doit maîtriser : le référentiel
Pour comprendre faisons une expérience.
Bob nous donne un Rubik's Cube mélangé à partir d'un certain état μ , il l'a mélangé avec la formule
$F = HPB'AD^2B'P$, Bob nous demande de retrouver l'état μ.



Le seul moyen de retrouver l'état μ c'est d'appliquer la formule inverse F' = P'BD^{2}A'BP'H' mais le big big problème c'est : Où est le Haut ? le Bas ? l'Avant ?? etc ...!! Sans ces informations on ne peut rien faire, on peut résoudre le Cube mais ça nous sert à rien car on tombe sur l'état résolu e, qui n'est pas l'état μ demandé !



Référentiel $\mathcal{R}$

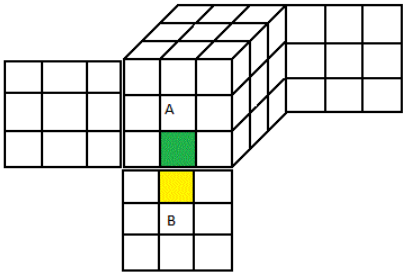
Quand on fixe le centre Haut=blanc, le centre Avant=vert (les 4 autres centres sont automatiquement fixés B=jaune, Postérieur=klein, Gauche=orange, Droite=rouge à cause du core) par ex, on dit qu'on a orienté le Cube (ne pas confondre avec l'orientation des sommets ou des arêtes) ou on a fixé le Cube, ou encore on se place dans le

référentiel $\mathcal{R}$ (rappel (H)=blanc, (A)=vert) . On travaille toujours dans un référentiel, c'est normal puisqu'on parle de H,B,A,P .... il faut savoir où est le Haut , le Bas etc .... Pour avoir un référentiel il suffit de fixer les centres (H) et (A), (les autres centres sont automatiquement fixés, à cause du core) car en Rubik's Cube les centres ne bougent pas.

Résumons : En Rubik's Cube il faut toujours fixé le Cube, autrement dit il faut orienter le Cube, pour ça on fixe les deux centres (H) et (A) , pour nous c'est (H)=blanc, (A)=vert , c'est le référentiel dans lequel nous travaillons et que nous désignons par $\mathcal{R}$

13.2 ANALYSE DU VOID CUBE

Comme le Void Cube n'a pas de centre , pour fixer le Cube (orienter le Cube) il faut utiliser une arête pour nous c'est : (BA) autrement dit (BA)=(jv) ou (BA)=$(jv)^{-}$, cette arête (jv) doit être fixe, (ne bouge pas, mais peut changer e l'orientation) c'est le référentiel du Void Cube et nous le désignons $\mathcal{S}$ ((B)=jaune, (A)=vert ou (B)=vert, (A)=jaune) ,



Référentiel $\mathcal{S}$

Ainsi on supprime les rotations B, A et les remplace par b, a ou encore h, a (c'est pareil) ,

Les rotations de base du Void Cube sont :

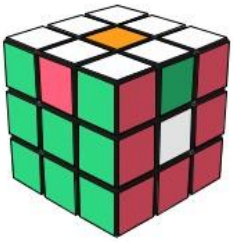
{H,h,a,P,G,D}

et l'ensemble des formules du Void Cube est donc

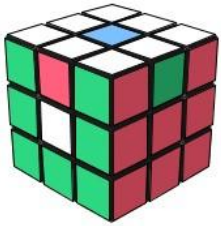
M = <H,h,a,P,G,D>

Remarque : à ce stage M est infini

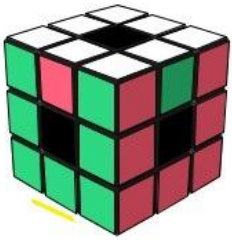
Si on prend M = <H,B,A,P,G,D> c'est-à-dire on mélange le Void Cube avec les rotations {H,B,A,P,G,D} comme en Rubik's Cube , on génère plus d'états qu'il en faut comme indique la fig ci-dessous



Le même état ci-dessous



Le même état ci-dessous



Un état du Void Cube ε

13.1 LE GROUPE DES FORMULES (M, .)

Soit M = <H,h,a,P,G,D> munie la loi '.' concaténation forme un groupe: Le groupe des formules (M, .) . Ici on a M infini, mais on va le rendre fini plus tard.

13.2 LES ETATS DE BASE

à chaque rotation de base Z on associé une configuration μ_Z nommé état base

$Z \rightarrow \mu_Z$: $H \rightarrow \mu_H$, $h \rightarrow \mu_h$, $a \rightarrow \mu_a$, ...

Puis on définit la fonction $\mathcal{X}$ de M sur G^+ ainsi

$\mathcal{X} : M \rightarrow G^+$

$\mathcal{X}(H) = \mu_H$, $\mathcal{X}(h) = \mu_h$, $\mathcal{X}(a) = \mu_a$, ...

En suite on proplonge en formule :

V = HhaP

$\mathcal{X}(V) = \mu_H\mu_h\mu_a\mu_P$

et $\mathcal{X}$ vérifie ;

1) $\mathcal{X}(I) = e$

2) $\mathcal{X}(VT) = \mathcal{X}(V)\,\mathcal{X}(T)$

3) $\mathcal{X}(V) = \mathcal{X}(T) \Rightarrow V = T$;($\mathcal{X}$ est injective)

Note : (3) signifie que, par définition, deux foumules qui donnent la même configuration sont considérées comme identiques,

$\mathcal{X}$ est bijective donc M est fini car G^+ est fini

deux formules donnant la même configuration sont identiques.

M = <H,h,a,P,G,D> laisse l'arête (BA) invariante (<u>invariant</u> : ne bouge pas, ne change pas d'orientation, <u>fixe</u> : ne bouge pas, mais peut changer l'orientation) !! ça veut dire qu'on a 11 arêtes seulement au lieu de 12 donc on a affaire à S_{11} pour les arêtes. Le groupe $\mathcal{V}^+$ des configurations du Void Cube est donc

$\mathcal{V}^+ = S_{11} \times \mathbb{Z}_2^{11} \times S_8 \times \mathbb{Z}_3^8$

$|\mathcal{V}^+| = 21\,626\,001\,637\,244\,928\,000$

Maintenant on va définir une action libre et compatible '•' de M sur $\mathcal{V}^+$.

$\mathcal{V}^+ \times M \to \mathcal{V}^+$

$(\mu,V) \to \mu \bullet V = \mu\, \mathcal{X}(V)$

A_1) $\forall \mu$; $\mu \bullet I = \mu$;élément neutre

A_2) $\forall \mu,V,T$; $(\mu \bullet V) \bullet T = \mu \bullet (VT)$;associative

A_3) $\varepsilon \bullet V = \varepsilon \Rightarrow V = I$

Quelqu'un qui laisse fixe e est forcement I, I est la seule formule ayant des points fixes.

A_4) $\forall \mu,V,T$; $\mu \bullet (VT) = (\mu \bullet V)\,(\mu \bullet T)$;compatibilité des lois de M et $\mathcal{V}$

On pose:

$\mathcal{V} = \{\nu \in \mathcal{V}^+ \mid \nu = \varepsilon \bullet V \, , \, V \in M\}$, ε=état résolu du Void Cube

Par définition $(\mathcal{V}, .)$ c'est le groupe du Void Cube.

C'est l'ensemble des configurations provenant de M (à partir de ε).

Remarque :

A) L'axiome (A_3) pour rendre M fini.

B) l'axiome (A_4) pour le théorème fondamental

Théorème fondamentale :

On démontre le théorème suivant

Le groupe du Void Cube $\mathcal{V}$ est un sous groupe de $\mathcal{V}^+$ vérifiant
$(w,z,s,t) \in \mathcal{V}^+$

$$(F) \sum_{i=1}^{12} z_i = 0 \pmod 2 \text{ , abrégé } z = 0 \pmod 2$$

$$(T) \sum_{i=1}^{8} t_i = 0 \pmod 3 \text{ , abrégé } t = 0 \pmod 3$$

et le nombre de choix (=contraintes=orbites) vaut :
$\mathcal{N}$=2 .3

On a tout de suite le cardinal de $\mathcal{V}$, $|\mathcal{V}| = |\mathcal{V}^+|/\mathcal{N}$
$|\mathcal{V}| = 11! \times 2^{11} \times 8! \times 3^8/2 \, .3 = 11! \times 2^{10} \times 8! \times 3^7$

= 3604333606207488000

Rappelons que la loi dans $\mathcal{V}$ est
Pour les arêtes : (w,z)(w',z') = (ww',z+w(z')) pour les sommets c'est pareil.

13.3 LE GROUPE DE PERMUTATION Λ

Comme en Rubik's Cube, Λ est défini par:

À chaque formule V∈M on associe une permutation p_V de S_{48} en particulier à chaque rotation de base {H,h,a,P,G,D} on associe une permutation (des autocollants) {p_H, p_h, p_a, p_P, p_G, p_D} de S_{48} et soit Λ l'ensemble des permutations engendrées par :

{p_H, p_h, p_a, p_P, p_G, p_D}

$\Lambda = < p_H, p_h, p_a, p_P, p_G, p_D >$ et
$\Lambda^+ = < p_H, p_h, p_a, p_P, p_G, p_D, p_\Gamma, p_\psi >$

X = {1,2,3, ... ,48} l'ensemble des autocollants

$p_\Gamma = (2,26);$

$p_\psi = (1,17,19);$

Γ et ψ sont des rotations qui violent les lois.

On défini sur Λ une loi de composition '.'
ρ, σ ∈Λ
ρ . σ = σ o ρ
(Λ, .) est un groupe , on écrit ρσ = ρ.σ on a donc deux groupe (M, .) et (Λ, .) le groupe des formules et le groupe des permutations (des autocollants) du twist .

Voici le ficher gap_voidcube.txt pour GAP :

```
pH := (2,4,6,8)(26,28,30,32)
(1,3,5,7)(17,21,25,29)(19,23,27,31) ;

pB := (18,24,22,20)(42,48,46,44)
(9,15,13,11)(33,45,41,37)(35,47,43,39);

pA := (2,34,18,36)(26,10,42,12)
(1,35,11,23)(17,9,37,3)(19,33,39,21);

pP := (6,38,22,40)(30,14,46,16)
(7,25,13,45)(29,27,41,47)(31,5,43 ,15);

pG := (4,12,20,14)(28,36,44,38)
(3,39,13,27)(21,11,41,5)(23,37,43,25);

pD := (8,16,24,10)(32,40,48,34)
(1,29,15,33)(17,31,45,35)(19,7,47,9);

pGamma := (2,26);

pPsi := (1,17,19);

ph := (10,36,14,40)(34,12,38,16);

pd := (2,30,22,42)(26,6,46,18);
```

```
pa :=  (4,32,24,44)(28,8,48,20);

Lambdaplus :=  Group( pH, ph, pa, pP, pG, pD, pGamma,
pPsi );

Rubik := Group( pH, pB, pA, pP, pG, pD );

Lambda1  := Group( pH, ph, pa, pP, pG, pD );

Print( "\n" );

Print( "|Lambda+| = ",Size( Lambdaplus ), "\n" );

Print( "|Lambda| = ", Size( Lambda1 ) , "\n" );

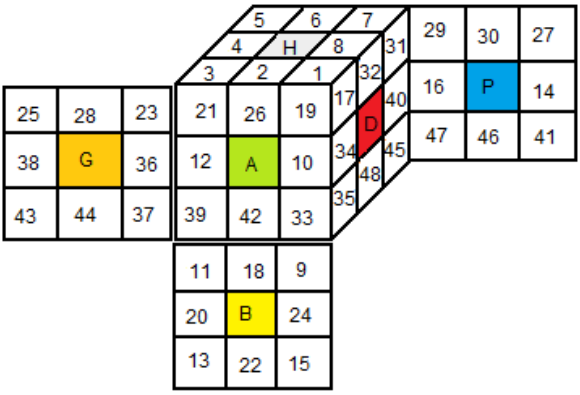
Print( "|G| = ", Size( Rubik ) , "\n" );

Print( "N = ", 2 * 3  , "\n" );

Print( "|V+| = ", Factorial(11) * 2^11 * Factorial(8) * 3^8 ,
"\n" );

Print( "|V| = |V+|/N = ", Factorial(11) * 2^11 * Factorial(8)
* 3^8  / ( 2 * 3 ), "\n" );

Print( "|G|/|V| = ",Size( Rubik )/Size( Lambda1 ) , "\n" );
```



Numérotation des autocollants

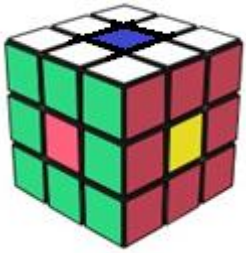
```
gap> (1,3,5,7)(2,4,6,8)(17,21,25,29)(19,23,27,31)(26,28,30,32)
gap> (9,15,13,11)(18,24,22,20)(33,45,41,37)(35,47,43,39)(42,48,46,44)
gap> (1,35,11,23)(2,34,18,36)(3,17,9,37)(10,42,12,26)(19,33,39,21)
gap> (5,43,15,31)(6,38,22,40)(7,25,13,45)(14,46,16,30)(27,41,47,29)
gap> (3,39,13,27)(4,12,20,14)(5,21,11,41)(23,37,43,25)(28,36,44,38)
gap> (1,29,15,33)(7,47,9,19)(8,16,24,10)(17,31,45,35)(32,40,48,34)
gap> (2,26)
gap> (1,17,19)
gap> (10,36,14,40)(12,38,16,34)
gap> (2,30,22,42)(6,46,18,26)
gap> (4,32,24,44)(8,48,20,28)
gap> <permutation group with 8 generators>
gap> <permutation group with 6 generators>
gap> <permutation group with 6 generators>
gap> gap>
gap> |Lamda+| = 21626001637244928000
gap> |Lamda| = 3604333606207488000
gap> |G| = 43252003274489856000
gap> N = 6
gap> |V+| = 2162600163724492800O
gap> |V| = |V+|/N = 3604333606207488000
gap> |G|/|V| = 12
gap> gap>
C:\GAP4R4\bin>
```

13.4 LE GROUPE DES SPOTS DU RUBIK'S CUBE

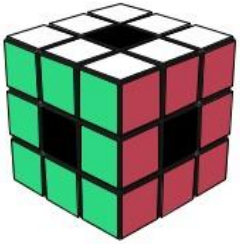
On a vu que plusieurs états du Rubik's Cube correspondent à un état du Void Cube, On va poser la question suivante:
Quels sont les états du Rubik's Cube (dans un référentiel) qui correspondent à l'état résolu du Void Cube ε ??



Un état du Rubik



Un état du Rubik



l'état résolu ε du Void Cube

On va noter $\mathcal{J}$ l'ensemble des états du Rubik's Cube qui correspondent à l'état résolu du Void Cube ε, voyons combien $\mathcal{J}$ possède d'éléments, un élément de $\mathcal{J}$ c'est un état où les faces ont la même couleur, sauf peut-être le centre (ce sont des états du Rubik's Cube exprimés dans des différents référentiels $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$, $\mathcal{R}''$, ...). Pour connaître le nombre d'éléments de $\mathcal{J}$, deux formules vont nous aider

$Q = (HD^2H'aH \,.\, D^2H^2aHa')^2$
$T = [h,a]$

On a:
- État résolu du Rubik e ⇒ état résolu du Void Cube ε
- Appliquer Q ça donne : 2 centres opposés fixes + 2 centres opposés permutés + 2 centres opposés permutés ⇒ donc on a 3 états de ce type

- Appliquer T ça donne : 3 centres tournés autour d'un sommet-Haut + 3 centres tournés autour du sommet-opposé ⇒ donc pour un sommet-Haut on a deux états (sens horaire et sens contraire) comme on a 4 sommet-Haut ça fait 8 états de ce type
finalement: 1 + 3 + 8 = 12 états, $|\mathcal{J}|=12$
il n'y en a pas d'autres, en effet ce sont des permutations des centres correspondent à l'état résolu du Void Cube ε.

REMARQUE

1. $\mathcal{J} = < q,t >$ où q (resp. t) est la permutation associée à Q (resp. T).

q=(1,2)(5,6) ;
t=(3,5,2)(1,4,6) ;

2. On pourrait penser que $\mathcal{J} = S_6$ puisqu'on a 6 centres, mais c'est une erreur, car les centres ne bougent pas comme ils veuillent, par ex on ne peut pas avoir (b)<->(v) ! les centres sont physiquement soudés entre eux par le core donc on n'a pas toutes les 6! permutations

13.5 GROUPE DES SPOTS

On va montrer que $\mathcal{J}$ est un groupe que l'on nomme le groupe des Spots
- $e \in \mathcal{J}$ (e=état résolu, il est dans $\mathcal{J}$)
- Un élément h de $\mathcal{J}$ laisse invariant la couleur des faces donc le produit de deux éléments de $\mathcal{J}$ est encore dans $\mathcal{J}$, par ex pour la face rouge

h(rouge) = rouge
g(rouge) = rouge
h[g(rouge)] = h(rouge) = rouge $\Rightarrow hg \in \mathcal{J}$
de même $h \in \mathcal{J} \Rightarrow h^{-1} \in \mathcal{J}$ en effet
h(rouge) = rouge
rouge = h^{-1}(rouge)
$\mathcal{J}$ est donc un groupe, mais malheureusement il n'est pas normal dans G !!!
un groupe normal si on a $ghg^{-1} \in \mathcal{J}$ pour tout $g \in G$ et $h \in \mathcal{J}$ il suffit de prendre
g état engendré par $(H^2D^2)^3H(H^2D^2)^3H'$ (tenir le Cube: (H)=blanc, (A)=vert, on se place dans le référentiel $\mathcal{R}$)
et h état engendré par $(HD^2H'aH \,.\, D^2H^2aHa')^2$ (tenir le Cube: (H)=blanc, (A)=vert)

on a $g=g^{-1}$ (tenir le Cube: (H)=blanc, (A)=vert)
ghg^{-1} n'est pas dans $\mathcal{J}$ puisque les faces n'ont pas la même couleur.

On ne peut pas "diviser" G par $\mathcal{J}$ donc pas de groupe quotient $G/\mathcal{J}$, la seule chose qu'on peut avoir c'est des classes $G\backslash\mathcal{J} = \{a\mathcal{J}, b\mathcal{J}, c\mathcal{J}, ... \}$

NOTE : On démontre que $\mathcal{J} = A_4$, on peut se demander comment est il possible un truc à 6 objets correspond à un truc à 4 objets, en fait A_4 est le groupe des déplacements (le groupe des symétries) du tétraèdre (le Pyraminx) et ses 6 arêtes correspondent aux 6 centres du Cube.

13.6 LE VOID CUBE ET LES CLASSES DU RUBIK'S CUBE

Considérons l'application suivante: l'ensemble des classes $G\backslash\mathcal{J}$ vers $\mathcal{V}$

$f: G\backslash\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{V}$
$a\mathcal{J} \rightarrow f(a\mathcal{J}) = \alpha$; α=a sans-centre

1. f est visiblement surjective, en effet un état α de Void Cube on associe la classe $a\mathcal{J}$ où $a=\alpha$ avec les centres de $\mathcal{R}$((H)=blanc, (A)=vert, ...) .
2. f est injective: $f(a\mathcal{J})=f(b\mathcal{J}) \Rightarrow \alpha=\beta \Rightarrow a\mathcal{J}=b\mathcal{J}$
donc f est bijective

On a :

$$\bigcup_{a\in G} a\mathcal{J} = a\mathcal{J} \cup b\mathcal{J} \cup c\mathcal{J} \ ...$$

les classes forment une partition de G

$$|G| = \sum_{a\in G} |a\mathcal{J}|$$

$$|G| = \sum_{a\in G} |\mathcal{J}| \ ; \text{car } |a\mathcal{J}| = |\mathcal{J}|$$

$|G| = k|\mathcal{J}|$; k=nombre de classes
d'où
$k = |G\backslash\mathcal{J}| = |G|/|\mathcal{J}|$
$|\mathcal{V}| = |G|/12 = 11! \times 2^{10} \times 8! \times 3^7$
car $G\backslash\mathcal{J}$ et $\mathcal{V}$ sont en bijection, on trouve bien le même résultat plus haut.

RESUME
M = <H,h,a,P,G,D>

$\mathcal{V}^+ = S_{11} \times \mathbb{Z}_2^{11} \times S_8 \times \mathbb{Z}_3^8$

action '•' de M sur $\mathcal{V}^+$

$\mathcal{V} = \{v\in\mathcal{V}^+ \mid v=\varepsilon\bullet V \ , V\in M\}$, ε=état résolu du Void Cube

Théorème fondamental de la Cubologie :

Le groupe du Void Cube $\mathcal{V}$ est un sous groupe de $\mathcal{V}^+$ vérifiant
$(w,z,s,t)\in\mathcal{V}^+$
$\sum z_i = 0 \pmod 2$
$\sum t_i = 0 \pmod 3$

$|\mathcal{V}| = |G|/12$

13.7 LE THEOREME DE VOID CUBE

Théorème

Le groupe du Void Cube $\mathcal{V}$ est un sous groupe du Rubik's Cube G

Le but de cette partie c'est démontrer ce théorème, pour montrer la beauté, l'étrangeté de ce théorème commençons par une expérience.

Prenez un Rubik's Cube mélangé et placez le sur une table avec une face devant vous. Comme le théorème nous dit $\mathcal{V} \subset G$ posons alors la question suivante:

- Est ce que c'est un état du Rubik's Cube ou un état du Void Cube ?
- Si c'est un état du Void Cube, est ce que c'est un état impair ? ?

Autrement dit , parmi les états du Rubik's Cube est ce qu'on peut distinguer les états du Void Cube ?? et parmi les états du Void Cube, est ce qu'on peut distinguer les états qui conduisent directement aux états singuliers ??

13.8 ACTION D'UN GROUPE

Soient G un groupe et X un ensemble, une action '•' de G sur X c'est une loi externe vérifiant les 2 propriétés suivantes:

$X \times G \rightarrow X$
$(x,g) \rightarrow x \bullet g$
1. $x \bullet e = x$ (e=élément neutre de G)
2. $(x \bullet g) \bullet h = x \bullet (gh)$

Une autre façon de voir une action c'est à chaque g on associe une permutation p_g de X

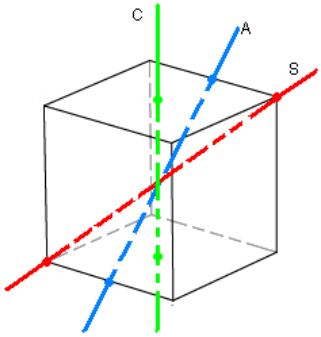
$(G, .) \rightarrow (S_x, .)$
$g \rightarrow p_g$; $p_g(x) = x \bullet g$
1. $p_e = id$
2. $p_{gh} = p_g\, p_h$; $(p_h \circ p_g)$

La deuxième façon de voir l'action nous montre qu' on étudie les permutations (les bijections) de X, mais sans G on ne sait pas les quelles qu'il faut étudier !, il y a tellement de permutations. G joue le rôle de guide, de filtre ... c'est lui qui nous montre les permutations intéressantes p_g à étudier.
La notion 'action' est très importante en Cubologie , car la construction du groupe du Rubik's Cube est basée sur l'action de M = <H,B,G,D,A,P> sur G^+ l'ensemble des configurations

13.9 LE GROUPE DES DEPLACEMENTS DU CUBE $\mathcal{D}$

Le groupe des déplacements du cube, c'est le groupe des isométries positives (les rotations) qui conservent le cube (et son orientation), c'est ce qu'on appelle couramment le groupe des symétries du cube.
ce groupe comporte l'identité (i) + 23 rotations divisées en trois types.
- Rotations axe (σ_S à 120°): sommet-sommet (il y a 8)
- Rotations axe ($\sigma_C = {}^tZ$ à 90°): centre-centre (9)
- Rotations axe (σ_A à 180°): arête-arête (6)

Il y a donc 24 rotations (voir détail .::ICI::.)



Une rotation (cube) σ déplace les sommets, arêtes et les centres, nous dirons que σ est paire ou impaire si la permutation des centres est paire ou impaire :

sig(σ) $\overset{\text{def}}{=}$ sig(centres)

par ex, une rotation arête-arête est impaire car elle déplace les centres en 3 couples .

$\sigma_{(BA)} \rightarrow (H,P)(B,A)(G,D) \Rightarrow sig(\sigma) = -1 = impaire$

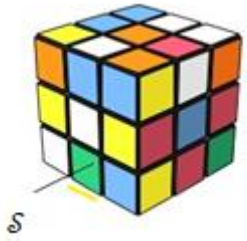
$\sigma_{(HDA)} \rightarrow (H,D,A)(B,G,P) \Rightarrow sig(\sigma) = 1 = paire$

$\sigma_{(H)} = {}^{t}H \rightarrow (A,G,P,D) \Rightarrow sig(\sigma) = -1 = impaire$

13.10 RELATION ENTRE LE VOID CUBE ET LE RUBIK'S CUBE

Le Void Cube est fixé par l'arête (BA) = (jv), c'est le référentiel $\mathcal{S}$ du Void Cube, le Rubik's Cube est fixé par les centres (H) = blanc et centre(A) = vert c'est le référentiel $\mathcal{R}$ du Rubik's Cube.

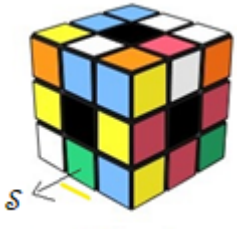
Prenez un Rubik's Cube à état résolu et placez le dans le référentiel $\mathcal{S}$, on est dans la représentation du Void Cube. On mélange le Cube avec {H,h,a,P,G,D} , on obtient un état ν du Void Cube.



un état ν de Void Cube

Avec cet état ν , on peut associer un état μ du Rubik's Cube de façon suivante: on tourne le Cube entier pour ramener au référentiel $\mathcal{R}$ ((H)=b, (A)=v), on est maintenant en présent d'un état μ du Rubik's Cube. On note σ les rotations-cube qui passent de $\mathcal{S}$ à $\mathcal{R}$.

ν•σ = μ.
Voyons sur un exemple
ν → a HDH'D'HPG h D^2P'G
μ → a HDH'D'HPG h D^2P'G . ${}^tD{}^tH'$





Void Cube: un état ν Rubik's Cube: μ=ν•σ où σ=${}^tD{}^tH'$

On voit donc qu'on peut avoir un état du Rubik's Cube à partir d'un état du Void Cube et un élément σ de $\mathcal{D}$.

On définit une action '•' de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{V}$ ainsi :

$\mathcal{V}$ x $\mathcal{D}$ → $\mathcal{V}$; ν=(w,z,s,t)

(ν,σ) → ν•σ = (w•σ, z•σ, s•σ, t•σ)

Par définition : $sig(w•\sigma) = [sig(\sigma)]^{sig(w)}$

Axiomes :

A1. $\nu \bullet i = \nu$

A2. $(\nu \bullet \sigma) \bullet \rho = \nu \bullet (\sigma\rho)$

A3. $\nu\ (\eta \bullet \sigma) = (\nu\eta) \bullet \sigma$

A4. $(\nu \bullet \sigma)\eta = (\nu\eta) \bullet \sigma$

A5. $(\nu \bullet \sigma)(\eta \bullet \sigma) = (\nu\eta) \bullet \sigma$

A6. $(w \bullet \sigma)(s \bullet \rho) = (w(s \bullet \rho)) \bullet \sigma$

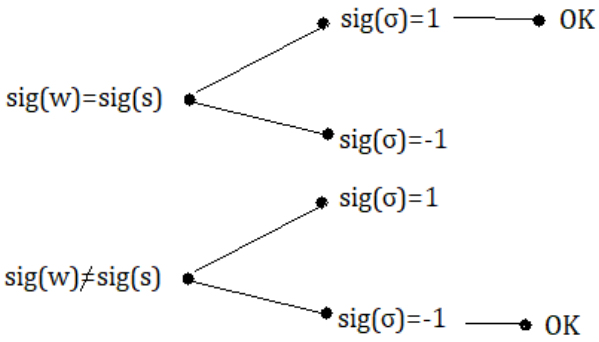
A7. $z \bullet \sigma + (w \bullet \sigma)(z') = (z + w(z')) \bullet \sigma$

On pose
L = { $(w,z,s,t,\sigma) \in \mathcal{V} \times \mathcal{D}$ avec

$$(\alpha) \begin{cases} \text{sig}(w) = \text{sig}(s), \text{sig}(\sigma) = 1 \\ \text{sig}(w) \neq \text{sig}(t), \text{sig}(\sigma) = -1 \end{cases}$$

}

<u>Remarque</u> : Avec la condition (α) on n'a pas toutes les choix ($|\mathcal{V}| \times |\mathcal{D}|$) mais seulement la moitié $\frac{1}{2}(|\mathcal{V}| \times |\mathcal{D}|)$



On va définir une loi '*' dans L pour qu'elle fasse un groupe et que ce groupe (L, *) soit isomorphe à (G, .).

Loi '*' dans L :

(w,z,s,t,σ) → (w•σ, z•σ , s•σ, t•σ)
(w',z',s',t',σ') → (w'•σ', z'•σ' , s'•σ', t'•σ')

(w,z,s,t,σ) * (w',z',s',t',σ') =

= (w(w'•σ') , z + w[z'•σ'] , s(s'•σ') , t + s[t'•σ'] , σ)
On peut vérifier que (L, *) forme un groupe.

Elélment neutre de L
Vérifions que (id,0,id,0,i) est l'élément neutre de L

(id,0,id,0,i)*(w,z,s,t,σ) = (id(w•σ), 0 + id[z•σ], id(s•σ), 0 + id[t•σ], i)
= (w•σ, z•σ, s•σ, t•σ, i) = ((w•σ)•i, (z•σ)•i, (s•σ)•i, (t•σ)•i)

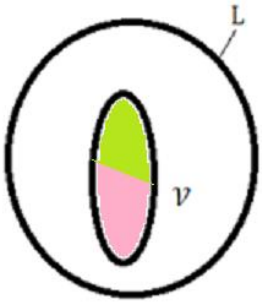
=(w•(σi), (z•(σi), (s•(σi), (t•(σ.i))

= (w•σ, z•σ, s•σ, t•σ) = (w,z,s,t,σ)

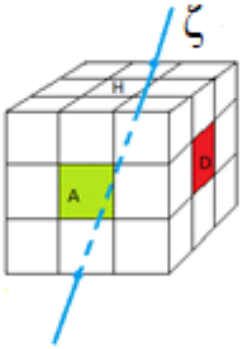
(w,z,s,t,σ)*(id,0,id,0,i) = (w(id•i), z + w[0•i], s(id•i), t + s[0•i], σ)
= (w id, z + w[0], s id, t + s[0], σ) = (w,z,s,t,σ)
donc (id,0,id,0,i) est l'élément neutre de L

13.11 UNE INCLUSION

On voit que $\mathcal{V}$ est incluse dans L, en effet dans $\mathcal{V}$ il n'y a que deux sortes d'éléments:
1. sig(w)=sig(s)
2. sig(w) ≠ sig(s)
Il suffit de choisir 2 rotations particulières pour distinguer les 2 clans de $\mathcal{V}$.



voyons de plus près
ν=(w,z,s,t) $\in \mathcal{V}$
(ν,σ)∈L
Soit ζ la rotation d'axe arête(BA)-arête(HP) , elle laisse (BA) fixe , c'est une rotation d'ordre 2
Soit Δ défini ainsi
$\Delta: \mathcal{V} \to L$
(w,z,s,t) → (w,z,s,t, i) si sig(w)=sig(s)
(w,z,s,t) → (w,z,s,t, ζ) si sig(w)≠sig(s)



Rotation ζ

¤ Δ est un morphisme

1) Δ(ε) = (ε,i)

2) $\Delta(\nu) \nearrow\searrow \begin{cases} (\nu, i) \\ (\nu, \zeta) \end{cases}$, $\Delta(\eta) \nearrow\searrow \begin{cases} (\eta, i) \\ (\eta, \zeta) \end{cases}$

Δ(ν)Δ(η) =

a. $(\nu,i)\ (\eta,i) = (\nu \bullet i)\ (\eta \bullet i) = (\nu\eta) \bullet i = (\nu\eta, i)$

b. $(\nu,i)\ (\eta,\zeta) = (\nu \bullet i)\ (\eta \bullet \zeta) = \nu(\eta \bullet \zeta) = (\nu\eta) \bullet \zeta = (\nu\eta,\zeta)$

c. $(\nu,\zeta)\ (\eta,i) = (\nu \bullet \zeta)\ (\eta \bullet i) = (\nu \bullet \zeta)\eta = (\nu\eta) \bullet \zeta = (\nu\eta,\zeta)$

d. $(\nu,\zeta)\ (\eta,\zeta) = (\nu \bullet \zeta)\ (\eta \bullet \zeta) = (\nu\eta) \bullet \zeta = (\nu\eta,\zeta)$

$$\Delta(\nu\eta) \nearrow\searrow \begin{cases} (\nu\eta, i) \\ (\nu\eta, \zeta) \end{cases}$$

d'où

$\Delta(\nu\eta) = \Delta(\nu)\Delta(\eta)$

¤ Voyons si Δ est injectif

$\Delta(\nu) = \Delta(\eta)$

$$(\nu, i) = \begin{cases} (\eta, i) \Rightarrow \nu = \eta \\ (\eta, \zeta) \Rightarrow \text{impossible car } \zeta \neq i \end{cases}$$

$$(\nu, \zeta) = \begin{cases} (\eta, i) \Rightarrow \text{impossible car } \zeta \neq i \\ (\eta, \zeta) \Rightarrow \nu = \eta \end{cases}$$

d'où $\nu = \eta \Rightarrow \Delta$ est injectif

$\mathcal{V}/\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathrm{Im}(\Delta)$
Δ est injectif $\Rightarrow \mathcal{V} = \mathrm{Im}(\Delta)$, $\mathcal{V}$ est isomorphe à $\mathrm{Im}(\Delta)$, autrement dit $\mathcal{V} \subset L$

On définit une fonction f ainsi :

f: L → G
(w,z,s,t,σ) → (w•σ, z•σ, s•σ, t•σ) = (u,x,v,y)

Vérifions si on a : sig(u)=sig(v)

sig(w•σ) = sig(s•σ) ?

$sig(\sigma)^{sig(w)} = sig(\sigma)^{sig(s)}$

*Cas1 :

$(1)^{sig(w)} = (1)^{sig(s)}$

$(1)^{sig(w)} = (1)^{sig(w)}$; condition (α) ⇒ OK

*Cas2 :

$(-1)^{(1)} = (-1)^{(-1)}$; condition (α) ⇒ OK

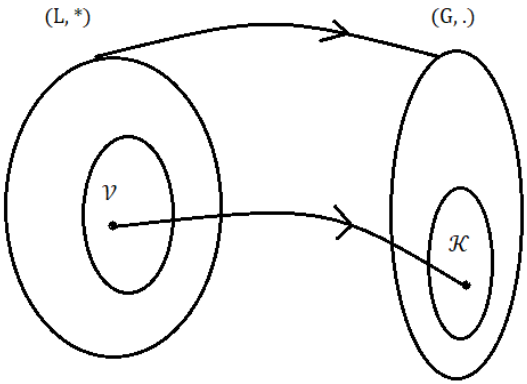
$(-1)^{(-1)} = (-1)^{(1)}$; condition (α) ⇒ OK

On a bien : sig(u)=sig(v)

I) f est un morphisme, en effet
a=(w,z,s,t,σ) → f(a)=(w•σ, z•σ , s•σ, t•σ)
a'=(w',z',s',t',σ') → f(a')=(w'•σ', z'•σ' , s'•σ', t'•σ')
f(a) f(a') = ((w•σ).(u=w'•σ') , z•σ + (w•σ)[z'•σ'] ,
(s•σ).(s'•σ') , t•σ + (s•σ)[t'•σ'])
= ((w.(w'•σ'))•σ , (z + w[z'•σ'])•σ, (s.(s'•σ'))•σ ,
(t + s[t'•σ'])•σ) d'après A6 et A7
et
a*a' = (w.(w'•σ'), z + w[z'•σ'], s.(s'•σ'), t + s[t'•σ'], σ)
f(a*a') = ((w.(w'•σ'))•σ, (z + w[z'•σ'])•σ , (s.(s'•σ'))•σ, (t +
s[t'•σ'])•σ) = f(a) f(a')
f est un morphisme

II) f est visiblement surjective: (u,x,v,y)∈G provient de (u,x,v,y,i)∈L .

III) f est injective
f(a) = (w•σ, z•σ , s•σ, t•σ) = (id,0,id,0)
w•σ = id ⇒ il n'y a que la rotation identique i qui ne bouge pas les 12 arêtes donc σ=i
w•i = id
w = id
z•σ= 0
z•i = 0
z = 0
même calcul pour les sommets
donc a=(id,0,id,0,i) f est bien injective
finalement f est bijective et (L,*) isomorphe à (G, .) . Les deux axiomes A6, A7 permettent à L forme un groupe isomorphe à G
l' inverse de a∈L vaut donc: $a^{-1} = f^{-1}[f(a)^{-1}]$



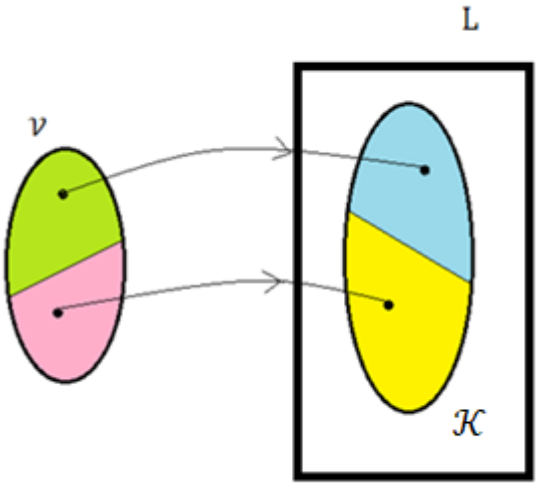
NOTE : on a bien $|\mathcal{V}| \times \frac{1}{2}|\mathcal{D}| = |G|$

Et voilà $\mathcal{V} \subset L=G$, il n'y a pas de contradiction .... dans G les éléments de $\mathcal{V}$ sont identifiés à $\mathcal{K}$
$\mathcal{K}$ = { (u,x,v,y)∈G tel que u((BA)) = (BA) = (jv)} l' arête (BA) ne bouge pas. On peut voit que $\mathcal{K}$ est un sous groupe de G.

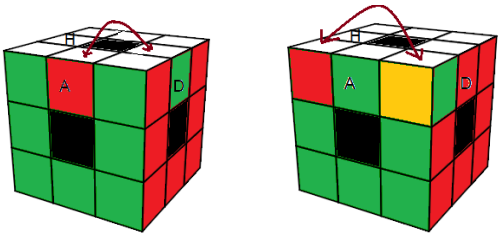
$\mathcal{K}$ isomorphe à $\mathcal{V}$:

→Les états pairs de $\mathcal{V}$ sont des états quand (BA) est bien placé et bien orienté (B=jaune, A=vert) , u(BA) = (BA) = (jv)

→Les états impairs de $\mathcal{V}$ sont des états quand (BA) est bien placé mal orienté (B=vert, A=jaune) , u(BA) = $(BA)^-$ = $(jv)^-$



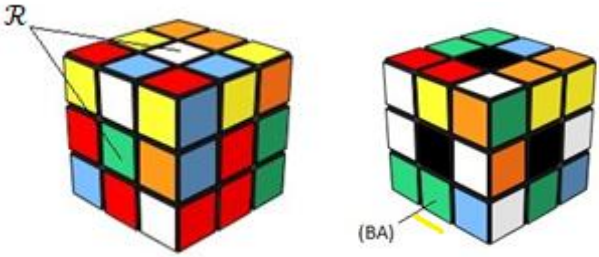
Concrètement
Résumons: Tenez votre Rubik's Cube mélangé de la façon suivante:
centre (H)=blanc, centre (A)=vert
1. Si l'arête (jv) n'est pas à sa place (BA) , c'est un état du Rubik's Cube .
2. Si l'arête (jv) est à sa place (BA) , c'est un état du Void Cube , de plus si (jv) est mal orientée c'est un état impair du Void Cube (état qui conduit directement aux états singuliers).



Un état singulier un autre état singulier

Ainsi ça montre que vous avez une chance sur deux 1/2 de tomber sur les états singuliers en Void Cube.

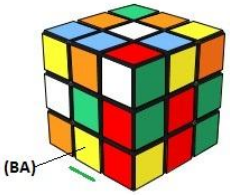
Concrètement, prenez un Rubik's Cube mélangé et placez le dans le référentiel $\mathcal{R}$ (Haut=blanc, Avant=vert), on est en présence d'un état du Rubik's Cube



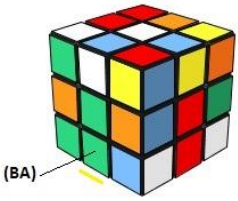
Un état du Rubik's Cube Un état du Void Cube

Si le Void Cube est dans le Rubik's Cube alors comment puis-je reconnaître les états du Void Cube, parmi les états du Rubik's Cube ??
Les états du Void Cube possède un "marqueur" , un "ADN" ..., c'est l'arête (jv) qui ne bouge pas !!! donc parmi les états du Rubik's Cube, les états dont l'arête (jv) ne bouge pas on

peut dire que c'est un état du Void Cube !! De plus si l'arête (jv) est bien orientée c'est un état pair.



Un état impair du Void Cube

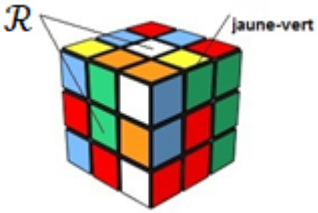


Un état pair du Void Cube

13.12 PASSAGE DU RUBIK'S CUBE A VOID CUBE ET INVERSEMENT

On passe de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{S}$ par des rotations-cube σ, on dit que la rotation σ est paire si la permutation des centres est paire.

La fig ci-dessous montre qu'on passe de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{S}$ par $\sigma = {}^{t}D' \, {}^{t}D' \, {}^{t}H$ pour ramener l'arête jaune-vert à sa place initiale. Ici la rotation σ est impaire donc on aura un état singulier pour ce Void Cube.



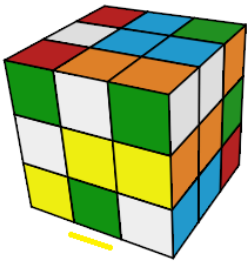
Référentiel $\mathcal{R}$: Rubik's Cube



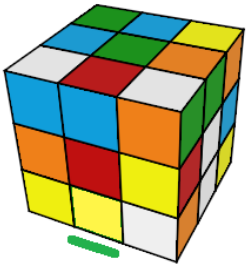
$\mathcal{R} \to \mathcal{S}$ par $\sigma = {}^{t}D'{}^{t}D'{}^{t}H$
Void Cube

Comme σ est impair, si vous résolvez ce Void Cube vous tombez sûrement sur un état singulier .

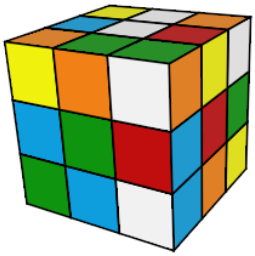
Pour passer de $\mathcal{S}$ à $\mathcal{R}$ c'est pareil on tourne le Cube pour ramener les centres ((H)=blanc, (A)=vert) à leur place initial.



état Void-pair



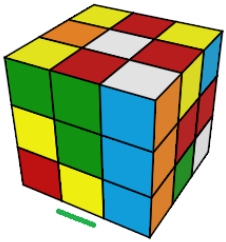
état Void-impair



état Rubik's Cube



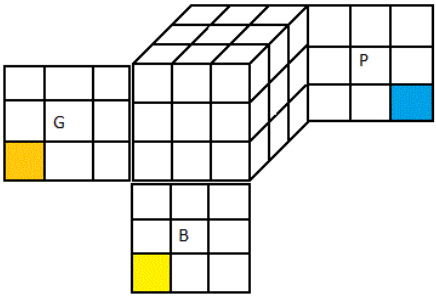
état Rubik et Void-pair



état Rubik et Void-impair

Commentaire important :

On pourrait fixer le Void Cube par un sommet par ex (BPG) au lieu de l' arête (BA) , le résultat sera pareil.



Référentiel $\mathcal{S}'$

Si on fixe le Void Cube par (BPG) avec B=jaune, P=klein, G=orange . dans cette représentation on aura:

M = <H,A,D,h,a,d> ; (= <H,A,D,H*,A*,D*>)

$\mathcal{V}^+ = S_{12} \times Z_2^{12} \times S_7 \times Z_3^7$
Le groupe du Void Cube $\mathcal{V}$ est un sous groupe de $\mathcal{V}^+$ vérifiant
$(w,z,s,t) \in V^+$
$\sum z_i = 0 \pmod 2$
$\sum t_i = 0 \pmod 3$

$|\mathcal{V}| = |G|/12$

$\mathcal{K}$ = { (u,x,v,y)∈G tel que v((BPG)) = (BPG) ou v((BPG)) = (HDA)}

$\mathcal{V}$ isomorphe à $\mathcal{K}$

I. Dans la représentation (BPG)
Prendre un Rubik's Cube mélangé et placer dans le référentiel $\mathcal{R}$.

1. Chercher le sommet (jko), s'il n'est pas dans (BPG) ni dans (HDA) c'est un état du Rubik's Cube.
2. S'il est dans l'emplacement (BPG) ou (HDA) , alors c'est un état du Void Cube. S'il est dans (HDA) c'est un état impair.
3. Pour résoudre ce Void Cube:

A. Si le sommet (jko), est dans (HDA) on range successivement les sommets Haut:
(HDA), (HPD), (HGP), (HAG) , une fois les sommets Haut sont rangés on a toutes les couleurs , on résout donc normalement le Cube.

B. Si le sommet (jko), est dans (BPG) on range successivement les sommets Bas:
(BPG), (BGA), (BAD), (BDP) , une fois les sommets Bas sont rangés on a toutes les couleurs , on résout donc normalement le Cube

II. Dans la représentation (BA)
Prendre un Rubik's Cube mélangé et placer dans le référentiel $\mathcal{R}$
1. Chercher l'arête (jv), si elle n'est pas à sa place (BA) , c'est un état du Rubik's Cube.
2. Si l'arête (jv) est à sa place (BA), c'est un état du Void Cube , de plus si elle est mal orientée c'est un état impair.

3. Par ex (BA)=(jv)$^{-}$ On ignore les centres, les réf des couleurs se font par les couleurs des arêtes ou des sommets.

Pour résoudre ce Void Cube, on fait :
→Placer les arêtes-Bas: (BA), (BD), (BP), (BG)
-a.On cherche le sommet (vjx) dans le sens horaire ⇒ ça donne la couleur x. ⇒ x=orange
-b. placer l'arête (vo) .
-c. tourner le Cube ^{t}H
-d. Revient en a.

→ Placer les sommets-Bas: (BAD), (BDP), (BPG), (BGA)
On cherche le sommet ayant deux couleurs arête-adjacent ⇒ (vjo), (vob), (vbr), vrj).

Une fois le Bas est fait , on résout donc normalement le Cube en ignorant les centres.
→ On finit l'équateur (réf couleurs sont les sommets)
→ On finit le Haut (réf couleurs sont arêtes, des sommets)

à la fin de la résolution , on tombe sur la singularité-sommets (deux sommets à permuter), car on a commencé par (BA)=(jv)$^{-}$ Et on peut remarquer que les centres à une permutation impaire.

Rappel les notations: (BPG) désigne un emplacement, une position , un trou, ... tandis que (jko) désigne un sommet, une pièce, un truc à 3 couleurs .

ATTENTION : il n'y a pas de correspondant entre la représentation (BPG) et (BA) càd si dans la représentation (BPG) un état ν est un état du Void Cube, cet état ν n'est pas forcement un état du Void Cube dans la représentation

(BA) c'est normal puisque les pièces (jko), (jv) bougent indépendamment, le sommet (jko), est à sa place, mais l'arête (jv) n'est pas forcement à sa place.

C'est vraiment extraordinaire, tout dépend de la façon de tenir le Cube, parfois il représente le Rubik's Cube, parfois le Void Cube. Et quand il représente le Void Cube il peut même nous dire si on a un l'état pair ou impair donc on aura un état singulier ou non avant même la résolution !! C'est comme si vous avez une toile, et suivant la façon de tenir la toile vous verrez un tableau de Van Gogh ou du Picasso !!!!

Notations et définitions

S_n = l'ensemble des permutations à n objets

A_n = le groupe alterné à n objets = le groupe des permutations paires.

$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ = le groupe à n éléments

M = l'ensemble des formules , c'est l'ensemble engendré par les rotations de base.

G = l'ensemble des états , c'est l'ensemble des configurations provenant de M à partir de l'état résolu e.

Rotation étendue = enlever les pièces/remettre les pièces, (on supprime le core) , ce sont des rotations qui violent les lois de G.

M^+ = l'ensemble des formules étendues , c'est l'ensemble engendré par les rotations de base + rotations étendues.

G^+ = l'ensemble des configurations , c'est l'ensemble généré par les formules étendues de M^+.

Supertwist = On ajoute des orientations sur d'autres pièces du twists. par ex pour le Rubik's Cube les centres seront orientés, le Skewb : les centres seront orientés, ...

G_s = l'ensemble des états du Supertwist, c'est l'ensemble généré par les formules de M avec les centres orientés, ...

G_s^+ = l'ensemble des configurations du supertwist, c'est l'ensemble généré par les formules étendues de M^+ avec les centres orientés, ...

TABLE DES MATIERES

1 Le commençement 1
1.1 Définition d'un twist 4
1.2 Définition le groupe du twist G 5
1.3 Exemples de twists 7
2 Le Skewb 10
2.1 L'introduction 10
2.2 Fixer le Cube 12
2.3 L'emplacement 13
2.4 Les pièces 15
2.5 Orientation des sommets 16
(2.5.1) Table d'orientation des sommets 18
2.6 Les centres 19
2.7 Les rotations 20
2.8 L'ensemble des configurations G^+ 25
2.9 Loi '.' sur G^+ 27
2.10 Les formules (M,.) 27
2.11 Les états de base 29
2.12 L'action de M sur G^+ 30
(2.12.1) A_4) $\forall V,T$; $e\bullet(VT) = (e\bullet V)\,(e\bullet T)$;compatibilité des lois de M et G 30
2.13 L'ensemble des états G 30

2.14 Analise les sommets....33
2.15 Théoreme fondamental....36
2.16 L' ensemble des permutations Λ....39
2.17 SuperSkewb....44
(2.17.1) La table des orientations des centres..... 47
3 Le secret du BigBlock....53
3.1 Entrons dans l'aventure....54
3.2 Vers un chemin difficile 55
3.3 Encore plus loin 59
4 Le Pyraminx....62
4.1 Description....62
4.2 Orienter le twist....64
4.3 Les rotations....65
4.4 Marquage des facettes....67
4.5 Couleur dominante....69
4.6 Numérotation....70
4.7 L'orientation des arêtes....73
4.8 L'ensemble des configurations G+....74
4.9 Recherche une loi sur $(G^+,.)$....75
(4.9.1) La table d'orientation..... 76
4.10 Les formules (M, .)....79
4.11 Les états de bases....83
4.12 L'action '•' de M sur G^+....84

4.13 Le groupe du Pyraminx G 85
4.14 Théorème fondamental 86
(4.14.1) On désigne (F), (P) les lois suivantes:..... 86
4.15 Le groupe des permutations (Λ,.) 90
4.16 Le groupe Glissant (Slice) du Pyraminx 95
4.17 Le groupe Croisé du Pyraminx 100
5 L'indicatrice du Pyraminx 108
5.1 Analyser le problème 108
5.2 Le groupe des déplacements du Pyraminx D(P) 110
5.3 L'indicatrice du Pyraminx 113
5.4 Fonction coloriage μ, μ* 113
6 L'Indicatrice du FTO 116
6.1 Analyser le problème 116
6.2 Le groupe des déplacements du FTO D(O) 118
6.3 L'indicatrice du FTO 121
6.4 Fonction coloriage μ, μ* 121
6.5 Réponse à nos questions 122
7 L'Indicatrice du Mégaminx 123
7.1 Analyser le problème 123
7.2 Le groupe des déplacements du Mégaminx D(M) 125
7.3 L'indicatrice du Mégaminx 128
7.4 Fonction coloriage μ, μ* 128

7.5 Réponse à nos questions 129
8 Le Square-1 131
8.1 Pésentation du Square-1 131
8.2 Les rotations 134
8.3 Les états étranges 136
8.4 Le problème de parité 137
8.5 Les rotations de base 139
8.6 Le groupe des configurations $(G^+,.)$ 141
8.7 Les formules du Square-1 (M,.) 142
8.8 $A_8 \times A_8 \subset G$ 145
9 Le Pocket 167
9.1 Description 167
9.2 Orientation le Cube 168
9.3 Les rotations 168
9.4 Marquage 170
9.5 L'ensemble des configurations G^+ 173
(9.5.1) $\mu\mu' = (v,y)(v',y') = (vv', y+v(y'))$ 174
9.6 Le groupe des formules (M, .) 174
9.7 Les états de base 175
9.8 Action de M sur G^+ 176
(9.8.1) A_4) $\forall V,T$; $e\bullet(VT) = (e\bullet V)\,(e\bullet T)$;compatibilité des lois de M et G 176
9.9 La groupe du Pocket G 176
(9.9.1) La table d'orientation 178

9.10 Théorème fondamental 180
9.11 Le groupe des permutations (Λ, .) 186
9.12 Le diamètre du Pocket 190
9.13 Les ordres du Pocket 192
9.14 L'entropie du Pocket 193
9.15 Les 𝔇-classe 195
9.16 Programmation 202
10 Le Megaminx 220
10.1 Description 220
10.2 Fixer le twist 221
10.3 Le marquage des facettes-sommets 224
10.4 La couleur dominante d'un sommet 225
10.5 Numérotation des sommets 227
10.6 Orientation des sommets 228
10.7 Le marquage des facettes-arêtes 229
10.8 La couleur dominante d'une arête 230
10.9 Numérotation des arêtes 232
10.10 L' orientation des arêtes 233
10.11 Les rotations 234
10.12 Formules 237
10.13 Formules étendues 238
10.14 Longueur d'une formule 238
10.15 Le groupe des configurations du Megaminx (G^+, .) 239

10.16 Loi de composition dans $(G^+,.)$ 242
(10.16.1) Rotations de base vérivient les lois: 247
Pour la 247
10.17 Le groupe (M, .) 247
10.18 Les états de base 248
10.19 L'action '•' de M sur G+ 249
(10.19.1) A_4) ∀V,T ; e•(VT) = (e•V) (e•T) ;compatibilité des lois de M et G 250
10.20 Théorème fondamental 251
11 La face cachée du Gear Shift 259
12 Le groupe du Floppy 269
13 Le Void Cube 275
13.1 Référentiel 277
13.2 Analyse du Void Cube 279
13.1 Le groupe des formules (M, .) 281
13.2 Les états de base 282
13.3 Le groupe de permutation Λ 285
13.4 Le groupe des Spots du Rubik's Cube 289
13.5 Groupe des Spots 291
13.6 Le Void Cube et les classes du Rubik's Cube 292
13.7 Le théorème de Void Cube 294
13.8 Action d'un groupe 295
13.9 Le groupe des déplacements du cube $\mathcal{D}$ 296

13.10 Relation entre le Void Cube et le Rubik's Cube 297

13.11 Une inclusion 301

13.12 Passage du Rubik's Cube à Void Cube et inversement 309

Du même auteur

¤*1 La conjecture de Fermat*

C'est un livre qui démontre la conjecture de Fermat, (appelé souvent "le dernier théorème de Fermat") en s'appuyant sur deux théorèmes: le théorème de Ribet et le théorème de Wiles. Un document rare et exceptionnel.

© Juin-2015, Morphocode CODE

¤*2 La Relativité Générale*

Tout sur la Relativité Générale et on trouve une démonstration de l'équation tensorielle d'Einstein à partir du principe moindre action, ce qui est très rare.

© Décembre-2016, Morphocode CODE

¤*3 Le Groupe du Rubik's Cube (Tome I, II)*

Le Rubik's Cube possède un groupe très riche en propriétés et si la partie mathématique du puzzle vous intéresse alors ce livre est pour vous.

© Mars-2017, Morphocode CODE

¤*4 La Relativité Restreinte*

La Relativité Restreinte est une théorie physique proposée par Einstein pour remplacer la mécanique newtonienne quand la vitesse des objets est proche à celle de la lumière c.

© Novembre-2017, Morphocode CODE

¤*5 La chasse aux nombres transcendants (Tome I, II)*

Les nombres transcendants sont très mystérieux, ils sont partout, beaucoup plus nombreux que les nombres algébriques et pour tant on connaît très peu de ces nombres, le premier est e, puis π, cos(1) , ...

© Novembre-2017, Morphocode CODE

¤*6 La Cubologie (Tome I, II)*

Pour comprendre les propriétés des twists il faut passer par les mathématiques, à chaque twist on associe un groupe et ce sont des propriétés de ce groupe qui expliquent les propriétés du twist.

© Mars-2018, Morphocode CODE

¤*7 La physique quantique (Tome I, II)*

Si vous voulez savoir ce que c'est la physique quantique , ce livre est pour vous.

© Sept-2018, Morphocode CODE